

“Autómata = Lógica”: Demostración

Dado: Alfabeto Σ

Teorema (Büchi)

Un lenguaje L sobre Σ es regular si y sólo si $L = L(\Phi)$ para alguna $\mathcal{L}_\Sigma$ -oración Φ en MSO.

Demostración: ($\Rightarrow$) Sea L un lenguaje regular

- Existe autómata $\mathcal{A}$ tal que $L = L(\mathcal{A})$

Vamos a construir una $\mathcal{L}_\Sigma$ -oración $\Phi_{\mathcal{A}}$ tal que $L(\mathcal{A}) = L(\Phi_{\mathcal{A}})$

“Autómata $\subseteq$ Lógica”: Demostración

Suponga que $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, donde

- ▶ $Q = \{q_0, \dots, q_m\}$

Si $\varepsilon \notin L(\mathcal{A})$, entonces $\Phi_{\mathcal{A}}$ se define como:

$$\exists X_{q_0} \cdots \exists X_{q_m} \Psi$$

donde Ψ es la conjunción de las siguientes fórmulas:

- ▶ Estado inicial:

$$\exists x \left[\forall y \neg(y < x) \wedge X_{q_0}(x) \right]$$

“Autómata $\subseteq$ Lógica”: Demostración

- Para cada $(q_i, a) \in Q \times \Sigma$ tal que $\delta(q_i, a) = q_j$:

$$\forall x \forall y \left[\left(X_{q_i}(x) \wedge P_a(x) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. x < y \wedge \neg \exists z (x < z \wedge z < y) \right) \rightarrow X_{q_j}(y) \right]$$

- Estado final:

$$\exists x \left[\forall y \neg (x < y) \wedge \bigvee_{(q,a) : \delta(q,a) \in F} \left(X_q(x) \wedge P_a(x) \right) \right]$$

“Autómata $\subseteq$ Lógica”: Demostración

- Conjuntos $X_{q_0}, \dots, X_{q_m}$ forman una partición:

$$\forall x \left[\bigvee_{q \in Q} \left(X_q(x) \wedge \bigwedge_{q' \in (Q \setminus \{q\})} \neg X_{q'}(x) \right) \right]$$

Si $\varepsilon \in L(\mathcal{A})$, entonces $\Phi_{\mathcal{A}}$ se define como:

$$\neg \exists x (x = x) \vee \exists X_{q_0} \dots \exists X_{q_m} \psi$$

¿Por qué funciona bien esto?

“Autómata $\supseteq$ Lógica”: Demostración

($\Leftarrow$) Sea Φ una $\mathcal{L}_\Sigma$ -oración en MSO

- Suponemos que $rc(\Phi) = k$, con $k > 0$

Vamos a definir un autómata $\mathcal{A}_\Phi$ sobre Σ tal que $L(\Phi) = L(\mathcal{A}_\Phi)$

- Ingrediente esencial: MSO k -tipos de las estructuras $\mathfrak{A}_w$

Se tiene que $\{\chi_{\mathfrak{A}_w}^k \mid w \in \Sigma^*\}$ es finito hasta equivalencia lógica

- ¿Por qué?

“Autómata $\supseteq$ Lógica”: Demostración

Sea $\{\tau_0, \dots, \tau_\ell\}$ una enumeración de $\{\chi_{\mathfrak{A}_w}^k \mid w \in \Sigma^*\}$

- ▶ $\{\tau_0, \dots, \tau_\ell\} \subseteq \{\chi_{\mathfrak{A}_w}^k \mid w \in \Sigma^*\}$
- ▶ Para cada $\chi_{\mathfrak{A}_w}^k$, existe $i \in \{0, \dots, \ell\}$ tal que $\chi_{\mathfrak{A}_w}^k \equiv \tau_i$
- ▶ Para cada $i, j \in \{0, \dots, \ell\}$ con $i \neq j$, se tiene que $\tau_i \not\equiv \tau_j$

Definimos $\mathcal{A}_\Phi$ a partir de $\{\tau_0, \dots, \tau_\ell\}$

“Autómata $\supseteq$ Lógica”: Demostración

Suponga que $\tau_0 \equiv \chi_{\mathfrak{A}_\varepsilon}^k$

Entonces $\mathcal{A}_\Phi$ se define como $(Q, \Sigma, \tau_0, \delta, F)$, donde:

- ▶ $Q = \{\tau_0, \dots, \tau_\ell\}$
- ▶ $F = \{\tau_i \mid i \in \{0, \dots, \ell\} \text{ y existe } w \in \Sigma^* \text{ tal que } \tau_i \equiv \chi_{\mathfrak{A}_w}^k \text{ y } \mathfrak{A}_w \models \Phi\}$
- ▶ $\delta(\tau_i, a) = \tau_j$ si existe $w \in \Sigma^*$ tal que:

$$\tau_i \equiv \chi_{\mathfrak{A}_w}^k \quad \text{y} \quad \tau_j \equiv \chi_{\mathfrak{A}_{wa}}^k$$

“Autómata $\supseteq$ Lógica”: Demostración

Primero tenemos que demostrar $\mathcal{A}_\phi$ está bien definido.

Lema

Para todo $w_1, w_2 \in \Sigma^$ y $a \in \Sigma$, si $\mathfrak{A}_{w_1} \equiv_k^{MSO} \mathfrak{A}_{w_2}$, entonces $\mathfrak{A}_{w_1 a} \equiv_k^{MSO} \mathfrak{A}_{w_2 a}$*

Ejercicio

Demuestre el lema usando la técnica de composición

“Autómata $\supseteq$ Lógica”: Demostración

Ahora tenemos que demostrar que $L(\Phi) = L(\mathcal{A}_\Phi)$

Sea $w \in \Sigma^*$ de largo $n \geq 0$

- Sea $\rho : \{0, \dots, n\} \rightarrow Q$ la ejecución de $\mathcal{A}_\Phi$ sobre w y $\tau_i = \rho(n)$

Por definición de δ y el lema, se tiene que:

$$\tau_i \equiv \chi_{\mathfrak{A}_w}^k$$

“Autómata $\supseteq$ Lógica”: Demostración

($\subseteq$) Suponga que $w \in L(\Phi)$

- ▶ Se tiene que $\mathfrak{A}_w \models \Phi$

Dado que $\tau_i \equiv \chi_{\mathfrak{A}_w}^k$, se tiene que $\tau_i \in F$

- ▶ Concluimos que $w \in L(\mathcal{A}_\Phi)$

($\supseteq$) Suponga que $w \in L(\mathcal{A}_\Phi)$

- ▶ Se tiene que $\tau_i \in F$: Existe $w_1 \in \Sigma^*$ tal que $\tau_i \equiv \chi_{\mathfrak{A}_{w_1}}^k$ y $\mathfrak{A}_{w_1} \models \Phi$

Dado que $\tau_i \equiv \chi_{\mathfrak{A}_w}^k$, se tiene que $\chi_{\mathfrak{A}_w}^k \equiv \chi_{\mathfrak{A}_{w_1}}^k$

Por lo tanto: $\mathfrak{A}_w \equiv_k^{\text{MSO}} \mathfrak{A}_{w_1}$

- ▶ Concluimos que $w \in L(\Phi)$ ya que $\mathfrak{A}_{w_1} \models \Phi$ y $rc(\Phi) = k$ $\square$

“Autómata = Lógica”: Algunos corolarios

Corolario

El lenguaje $\{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$ no es regular

Corolario

$MSO = \exists MSO$ sobre las estructuras que representan palabras