

Una Aplicación de Teoría de Modelos Finitos: “Lógica = Autómata”

IIC3263

Lógica Monádica de Segundo Orden (MSO)

La lógica monádica de segundo orden (MSO) restringe a la LSO sólo permitiendo cuantificadores de segundo orden unarios.

- ▶ ¿Qué se puede decir en esta lógica?

En esta sección vamos a estudiar esta lógica por su conexión con la teoría de autómatas.

- ▶ Vamos a demostrar que “lógica = autómata”

Un poco de notación

Notación

El rango de cuantificación de una fórmula φ en MSO se define como:

- ▶ *Si φ es atómica, entonces $rc(\varphi) = 0$*
- ▶ *Si $\varphi = \neg\psi$, entonces $rc(\varphi) = rc(\psi)$*
- ▶ *Si $\varphi = \psi \vee \theta$, entonces $rc(\varphi) = \max\{rc(\psi), rc(\theta)\}$*
- ▶ *Si $\varphi = \exists x \psi$, donde x es un cuantificador de primer orden, entonces $rc(\varphi) = 1 + rc(\psi)$*
- ▶ *Si $\varphi = \exists X \psi$, donde X es un cuantificador de segundo orden, entonces $rc(\varphi) = 1 + rc(\psi)$*

Un poco de notación

Dado: $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A , tupla $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ de puntos en A y tupla $\bar{A} = (A_1, \dots, A_n)$ de subconjuntos de A

Notación

$(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})$ es una $(\mathcal{L} \cup \{c_1, \dots, c_m, P_1(\cdot), \dots, P_n(\cdot)\})$ -estructura tal que:

- ▶ $c_i^{(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})} = a_i$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$
- ▶ $P_j^{(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})} = A_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$

Juegos para MSO

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ que contiene constantes $\{c_1, \dots, c_\ell\}$

Elementos del juego:

Tablero	:	$\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$
Jugadores	:	Duplicator (D) y Spoiler (S)
Número de rondas	:	$k \geq 0$ (parámetro del juego)

Juegos para MSO

En cada ronda, **S** decide si va a jugar un **punto** o un **conjunto**

- ▶ Si **S** decide jugar un punto, entonces elige una estructura y juega un punto en esa estructura
D responde con un punto en la otra estructura
- ▶ Si **S** decide jugar un conjunto, entonces elige una estructura y juega un conjunto en esa estructura
D responde con un conjunto en la otra estructura

Juegos para MSO

Sean $(a_1, \dots, a_m)$, $(b_1, \dots, b_m)$ los puntos jugados en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, y $(A_1, \dots, A_n)$, $(B_1, \dots, B_n)$ los conjuntos jugados en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$

► Se tiene que $k = m + n$

S gana el juego si $((c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_\ell^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_m), (c_1^{\mathfrak{B}}, \dots, c_\ell^{\mathfrak{B}}, b_1, \dots, b_m))$ no es un isomorfismo parcial de $(\mathfrak{A}, A_1, \dots, A_n)$ en $(\mathfrak{B}, B_1, \dots, B_n)$

► En caso contrario gana **D**

Juegos para MSO: Estrategia ganadora

Definición

D tiene una estrategia ganadora en el juego para MSO de k rondas entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, si para cada posible forma de jugar de **S**, existe una forma de jugar de **D** que le permite ganar.

Notación: $\mathfrak{A} \equiv_k^{MSO} \mathfrak{B}$

Juegos para MSO: Primer ejemplo

Sean $\mathfrak{A} = \langle \{1, 2, 3, 4\} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle \{1, 2, 3, 4, 5\} \rangle$. ¿Es cierto que $\mathfrak{A} \equiv_4^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$?

Dado $k \geq 1$: ¿Existe algún n para el cual $\langle \{1, \dots, n\} \rangle \equiv_k^{\text{MSO}} \langle \{1, \dots, n, n+1\} \rangle$?

Juegos para MSO: Primer Ejemplo

Dado: $\mathcal{L} = \emptyset$

Proposición

Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$ -estructuras con al menos 2^k elementos en el dominio cada una. Entonces $\mathfrak{A} \equiv_k^{MSO} \mathfrak{B}$.

Demostración: Por inducción en k

- La demostración es trivial para el caso $k = 1$

Suponga que la propiedad se cumple para $k \geq 1$, y que $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}$ -estructuras con al menos 2^{k+1} elementos en el dominio cada una

- Vamos a demostrar que $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{MSO} \mathfrak{B}$

Juegos para MSO: Primer Ejemplo

Primero suponga que **S** decide jugar un punto a_1 en $\mathfrak{A}$.

- ▶ Entonces **D** responde con un punto arbitrario b_1 en $\mathfrak{B}$.
 - ▶ Se tiene que $|A \setminus \{a_1\}| \geq 2^k$ y $|B \setminus \{b_1\}| \geq 2^k$

Entonces:

$$\begin{array}{lcl} \langle \{a_1\} \rangle & \equiv_k^{\text{MSO}} & \langle \{b_1\} \rangle \\ \langle A \setminus \{a_1\} \rangle & \equiv_k^{\text{MSO}} & \langle B \setminus \{b_1\} \rangle \quad \text{por hipótesis de inducción} \end{array}$$

Por lo tanto: A partir de la movida (a_1, b_1) , **D** tiene una estrategia ganadora para las siguientes k movidas

- ▶ **D** **compone** las estrategias señaladas arriba

Juegos para MSO: Primer Ejemplo

Ahora suponga que **S** decide jugar un conjunto A_1 en $\mathfrak{A}$.

- ▶ Si $|A_1| \leq 2^k$, entonces **D** responde con un conjunto arbitrario B_1 en $\mathfrak{B}$ tal que $|A_1| = |B_1|$.
 - ▶ Se tiene que $|A \setminus A_1| \geq 2^k$ y $|B \setminus B_1| \geq 2^k$

Entonces:

$$\begin{array}{lll} \langle A_1 \rangle & \equiv_k^{\text{MSO}} & \langle B_1 \rangle \\ \langle A \setminus A_1 \rangle & \equiv_k^{\text{MSO}} & \langle B \setminus B_1 \rangle \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{dado que } |A_1| = |B_1| \\ \text{por hipótesis de inducción} \end{array}$$

Por lo tanto: A partir de la movida (A_1, B_1) , **D** tiene una estrategia ganadora para las siguientes k movidas

- ▶ **D compone** las estrategias señaladas arriba

Juegos para MSO: Primer Ejemplo

- ▶ Si $|A \setminus A_1| \leq 2^k$, entonces **D** responde con un conjunto arbitrario B_1 en $\mathfrak{B}$ tal que $|B \setminus B_1| = |A \setminus A_1|$

Como en el caso anterior, se concluye que a partir de la movida (A_1, B_1) , **D** tiene una estrategia ganadora para las siguientes k movidas.

Juegos para MSO: Primer ejemplo

- ▶ Si $|A_1| > 2^k$ y $|A \setminus A_1| > 2^k$, entonces **D** responde con un conjunto arbitrario B_1 en $\mathfrak{B}$ tal que $|B_1| \geq 2^k$ y $|B \setminus B_1| \geq 2^k$.

Por hipótesis de inducción:

$$\begin{array}{ccc} \langle A_1 \rangle & \equiv_k^{\text{MSO}} & \langle B_1 \rangle \\ \langle A \setminus A_1 \rangle & \equiv_k^{\text{MSO}} & \langle B \setminus B_1 \rangle \end{array}$$

Por lo tanto: A partir de la movida (A_1, B_1) , **D** tiene una estrategia ganadora para las siguientes k movidas

Juegos para MSO: Primer ejemplo

Si **S** decide jugar en $\mathfrak{B}$, **D** responde de manera análoga

Por lo tanto: **D** tiene una forma de responder a **S** en la primera movida que le asegura una estrategia ganadora en las siguientes k movidas

Concluimos que: $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$



Juegos para MSO: Segundo Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$

Proposición

Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$ -estructuras tales que $<^{\mathfrak{A}}$, $<^{\mathfrak{B}}$ son ordenes lineales, $\mathfrak{A}$ tiene una cantidad par de elementos y $\mathfrak{B}$ tiene una cantidad impar de elementos. Entonces $\mathfrak{A} \not\equiv_4^{MSO} \mathfrak{B}$.

Ejercicio

Demuestre la proposición

Caracterización de MSO

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Notación

$MSO[k]$ es el conjunto de $\mathcal{L}$ -oraciones en MSO con rango de cuantificación a lo más k .

Teorema

Para todo par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathfrak{A} \equiv_k^{MSO} \mathfrak{B}$
2. $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $MSO[k]$

Demostración de la caracterización: Tipo de una estructura

Dado: $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A , tupla $\bar{a}$ de puntos en A y tupla $\bar{A}$ de subconjuntos de A

Definición

El MSO k -tipo de $(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})$ es definido como:

$$\begin{aligned} mso-tp_k(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A}) = \{ & \varphi(\bar{x}, \bar{X}) \mid \\ & \varphi(\bar{x}, \bar{X}) \text{ es una fórmula en MSO tal que} \\ & rc(\varphi(\bar{x}, \bar{X})) \leq k \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}, \bar{A}) \} \end{aligned}$$

Demostración de la caracterización: Tipo de una estructura

Lema

Si $\mathcal{L}$ es finito, entonces $\text{mso-tp}_k(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})$ contiene un número finito de fórmulas hasta equivalencia lógica.

Demostración: Como en el caso de LPO, por inducción en k se puede demostrar que hasta equivalencia lógica hay un número finito de fórmulas $\varphi(\bar{x}, \bar{X})$ en MSO con $rc(\varphi(\bar{x}, \bar{X})) \leq k$. $\square$

Demostración de la caracterización: Tipo de una estructura

Como $\text{mso-tp}_k(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})$ es finito (hasta equivalencia lógica), existe una fórmula $\chi_{(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})}^k(\bar{x}, \bar{X})$ que lo representa.

Para cada $(\mathfrak{B}, \bar{b}, \bar{B})$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &\models \chi_{(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A})}^k(\bar{b}, \bar{B}) \\ &\text{si y sólo si} \\ \text{mso-tp}_k(\mathfrak{B}, \bar{b}, \bar{B}) &= \text{mso-tp}_k(\mathfrak{A}, \bar{a}, \bar{A}) \end{aligned}$$

Demostración de la caracterización: Back & Forth

Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ $\mathcal{L}$ -estructuras con dominios A y B , respectivamente

Para la demostración usamos tipos y la relación:

► $\mathfrak{A} \simeq_0^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$ si $\mathfrak{A} \equiv_0^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$

► $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$ si

forth : para cada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que
 $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b)$

para cada $X \subseteq A$, existe $Y \subseteq B$ tal que
 $(\mathfrak{A}, X) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, Y)$

back : para cada $b \in B$, existe $a \in A$ tal que
 $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b)$

para cada $Y \subseteq B$, existe $X \subseteq A$ tal que
 $(\mathfrak{A}, X) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, Y)$

Caracterización de MSO: Versión extendida

Teorema

Para todo par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathfrak{A} \equiv_k^{MSO} \mathfrak{B}$
2. $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $MSO[k]$
3. $\mathfrak{A} \simeq_k^{MSO} \mathfrak{B}$

Demostración: Suponga que los dominios de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son A y B , respectivamente.

(1. $\Leftrightarrow$ 3.): Por inducción en k . Para $k = 0$ se tiene por definición.

Demostración de la versión extendida

Suponga que la propiedad se cumple para k .

- ▶ Suponga que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

Si **S** juega $a_1 \in A$, existe $b_1 \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$ (ya que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$).

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a_1) \equiv_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$

- ▶ Para todo $a_1 \in A$, existe $b_1 \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \equiv_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$

Demostración de la versión extendida

Si **S** juega $A_1 \subseteq A$, existe $B_1 \subseteq B$ tal que $(\mathfrak{A}, A_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$ (ya que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$).

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, A_1) \equiv_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$

- Para todo $A_1 \subseteq A$, existe $B_1 \subseteq B$ tal que $(\mathfrak{A}, A_1) \equiv_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$

Combinando esto con los resultados obtenidos usando back, concluimos que $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

Demostración de la versión extendida

- Suponga que $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$

Sea $a_1 \in A$ y suponga que **S** juega a_1 . Como $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$, existe $b_1 \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \equiv_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$.

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$

- Para todo $a_1 \in A$, existe $b_1 \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$

Demostración de la versión extendida

Sea $A_1 \subseteq A$ y suponga que $\mathbf{S}$ juega A_1 . Como $\mathfrak{A} \equiv_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$, existe $B_1 \subseteq B$ tal que $(\mathfrak{A}, A_1) \equiv_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$.

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, A_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$

- Para todo $A_1 \subseteq A$, existe $B_1 \subseteq B$ tal que $(\mathfrak{A}, A_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$

Combinando esto con los resultados obtenidos al hacer jugar a $\mathbf{S}$ en $\mathfrak{B}$, concluimos que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

Demostración de la versión extendida

(2. $\Leftrightarrow$ 3.): Por inducción en k .

Para $k = 0$ se tiene la equivalencia.

- ▶ ¿Por qué?

Supongamos que la equivalencia se tiene para k .

- ▶ Suponga que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k+1]$.
 - ▶ Para hacer esto nos basta con considerar los casos $\exists x \varphi(x)$ y $\exists X \psi(X)$

Consideramos entonces dos casos:

- ▶ Si $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi(x)$, entonces existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi(a)$.

Como $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b)$.

Demostración de la versión extendida

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a)$ y $(\mathfrak{B}, b)$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k]$

Sea $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$. Como $(\mathfrak{A}, a) \models \varphi(c)$, $rc(\varphi(c)) = k$ y $(\mathfrak{A}, a)$, $(\mathfrak{B}, b)$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k]$, se tiene que $(\mathfrak{B}, b) \models \varphi(c)$.

Tenemos entonces que $\mathfrak{B} \models \varphi(b)$, por lo que concluimos que $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x)$.

De la misma forma concluimos que si $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi(x)$, entonces $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi(x)$.

Demostración de la versión extendida

- ▶ Si $\mathfrak{A} \models \exists X \psi(X)$, entonces existe $A_1 \subseteq A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi(A_1)$.

Como $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$, existe $B_1 \subseteq B$ tal que
 $(\mathfrak{A}, A_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$.

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, A_1)$ y $(\mathfrak{B}, B_1)$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k]$

Sea $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{P(\cdot)\}$. Como $(\mathfrak{A}, A_1) \models \psi(P)$, $rc(\psi(P)) = k$ y $(\mathfrak{A}, A_1), (\mathfrak{B}, B_1)$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k]$, se tiene que $(\mathfrak{B}, B_1) \models \psi(P)$.

Tenemos entonces que $\mathfrak{B} \models \psi(B_1)$, por lo que concluimos que $\mathfrak{B} \models \exists X \psi(X)$.

De la misma forma concluimos que si $\mathfrak{B} \models \exists X \psi(X)$, entonces $\mathfrak{A} \models \exists X \psi(X)$.

Demostración de la versión extendida

- Suponga que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k + 1]$.
Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$.

Sea $a_1 \in A$

- Como $\mathfrak{A} \models \chi_{(\mathfrak{A}, a_1)}^k(a_1)$, sabemos que $\mathfrak{A} \models \exists x \chi_{(\mathfrak{A}, a_1)}^k(x)$
- Puesto que $rc(\exists x \chi_{(\mathfrak{A}, a_1)}^k(x)) = k + 1$, se tiene que
 $\mathfrak{B} \models \exists x \chi_{(\mathfrak{A}, a_1)}^k(x)$

Entonces, existe $b_1 \in B$ tal que $\mathfrak{B} \models \chi_{(\mathfrak{A}, a_1)}^k(b_1)$

Demostración de la versión extendida

Por lo tanto: $\text{mso-tp}_k(\mathfrak{A}, a_1) = \text{mso-tp}_k(\mathfrak{B}, b_1)$, lo cual significa que $(\mathfrak{A}, a_1)$ y $(\mathfrak{B}, b_1)$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k]$.

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$

Entonces: Para todo $a_1 \in A$, existe $b_1 \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$

De la misma forma concluimos que para todo $b_1 \in B$, existe $a_1 \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, b_1)$

Demostración de la versión extendida

Sea $A_1 \subseteq A$

- ▶ Como $\mathfrak{A} \models \chi_{(\mathfrak{A}, A_1)}^k(A_1)$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \exists X \chi_{(\mathfrak{A}, A_1)}^k(X)$
- ▶ Puesto que $rc(\exists X \chi_{(\mathfrak{A}, A_1)}^k(X)) = k + 1$, se tiene que $\mathfrak{B} \models \exists X \chi_{(\mathfrak{A}, A_1)}^k(X)$

Por lo tanto: Existe $B_1 \subseteq B$ tal que $\mathfrak{B} \models \chi_{(\mathfrak{A}, A_1)}^k(B_1)$

Concluimos que $\text{mso-tp}_k(\mathfrak{A}, A_1) = \text{mso-tp}_k(\mathfrak{B}, B_1)$, lo cual significa que $(\mathfrak{A}, A_1)$ y $(\mathfrak{B}, B_1)$ están de acuerdo en $\text{MSO}[k]$.

Demostración de la versión extendida

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, A_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$

Entonces: Para todo $A_1 \subseteq A$, existe $B_1 \subseteq B$ tal que $(\mathfrak{A}, A_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$

De la misma forma concluimos que para todo $B_1 \subseteq B$, existe $A_1 \subseteq A$ tal que $(\mathfrak{A}, A_1) \simeq_k^{\text{MSO}} (\mathfrak{B}, B_1)$

Tenemos que: $\mathfrak{A} \simeq_{k+1}^{\text{MSO}} \mathfrak{B}$



Caracterización de MSO: Dos corolarios

Sea $\mathcal{L} = \emptyset$ y $\text{PARIDAD} = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \text{dominio de } \mathfrak{A} \text{ tiene un número par de elementos}\}$

Corolario

PARIDAD no es expresable en MSO

Corolario

MSO es menos expresiva que LSO

“Autómata = Lógica”

Nuestro objetivo es demostrar que “autómata = lógica”

- ▶ ¿Qué significa esto?

Queremos encontrar una lógica que defina a los lenguajes regulares

Pero antes:

- ▶ Vamos a hacer un breve repaso sobre lenguajes regulares
- ▶ Vamos a mostrar como representar palabras como estructuras

Para recordar: Autómatas

Definición

Autómata determinista: $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$

- ▶ Q es un conjunto finito de estados
- ▶ Σ es un alfabeto finito
- ▶ $q_0 \in Q$ es el estado inicial
- ▶ $F \subseteq Q$ es un conjunto de estados finales
- ▶ δ es una función total:

$$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$$

δ es llamada función de transición

Para recordar: Autómatas

Dado: Palabra $w = a_0 \cdots a_{n-1}$ ($n \geq 1$) sobre el alfabeto Σ

Definición

La ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w es una función:

$$\rho : \{0, \dots, n\} \rightarrow Q$$

tal que $\rho(0) = q_0$ y

$$\rho(k+1) = \delta(a_k, \rho(k)) \quad \text{para cada } k \in \{0, \dots, n-1\}$$

Además: Para la palabra vacía ε , la ejecución de $\mathcal{A}$ es la función $\rho : \{0\} \rightarrow Q$ tal que $\rho(0) = q_0$

Para recordar: Autómatas

Autómata $\mathcal{A}$ acepta una palabra w de largo $n \geq 0$ si:

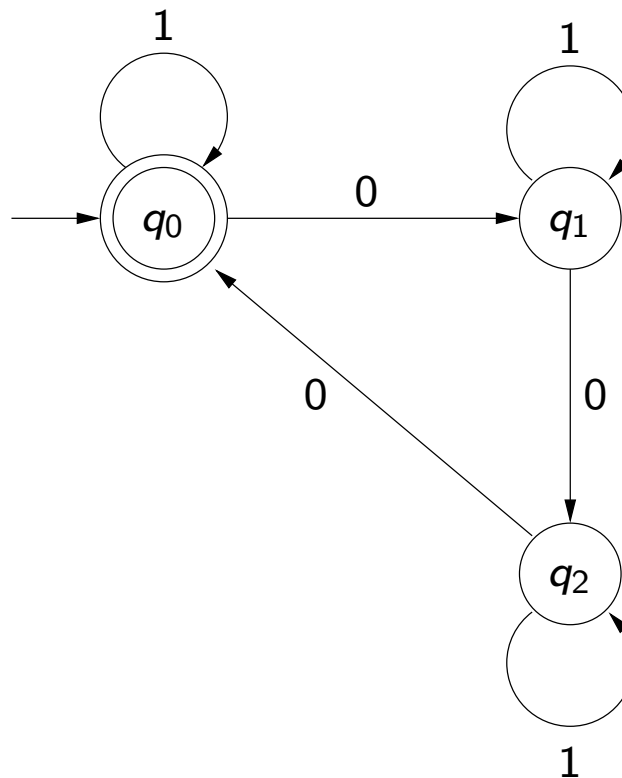
- ▶ Para la ejecución ρ de $\mathcal{A}$ sobre w se tiene que $\rho(n) \in F$

Definición

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ acepta } w\}$$

Autómatas: Un ejemplo

¿Qué lenguaje acepta este autómata sobre el alfabeto $\{0, 1\}$?



Para recordar: Lenguajes regulares

Dado: Alfabeto Σ

Definición

Un lenguaje $L \subseteq \Sigma^$ es regular si y sólo si existe un autómata determinista $\mathcal{A}$ tal que $L = L(\mathcal{A})$*

Ejercicio

¿Es el lenguaje $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ regular?

Para recordar: Expresiones regulares

Una alternativa para definir lenguajes regulares: **Expresiones regulares**

Definición

El conjunto de las expresiones regulares sobre un alfabeto Σ es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

- ▶ $\emptyset$, ε y a ($a \in \Sigma$) son expresiones regulares sobre Σ
- ▶ si r_1 y r_2 son expresiones regulares sobre Σ , entonces $(r_1 + r_2)$, $(r_1 r_2)$ y (r_1^*) son expresiones regulares sobre Σ

Para recordar: Expresiones regulares

Definición

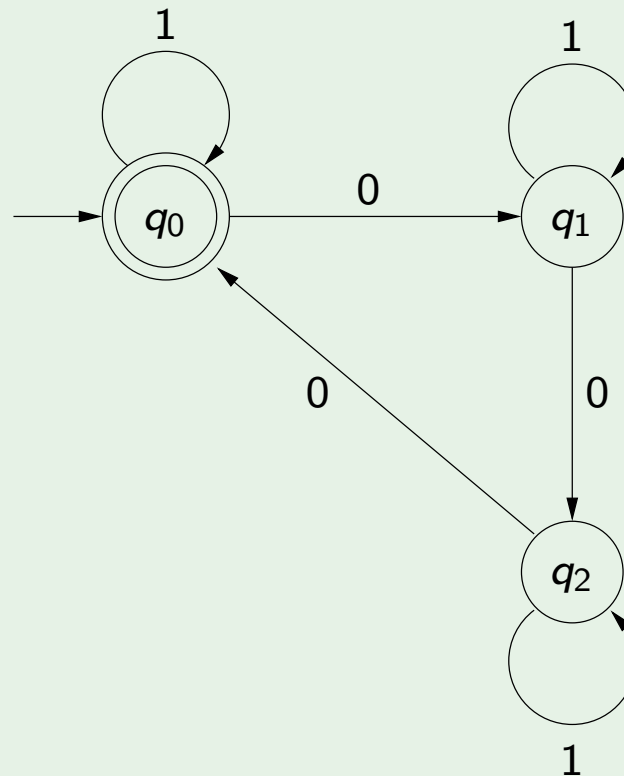
El lenguaje aceptado por una expresión regular r sobre un alfabeto Σ , denotado como $L(r)$, es definido recursivamente como:

- ▶ $L(\emptyset) = \emptyset$ y $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- ▶ $L(a) = \{a\}$, para cada $a \in \Sigma$
- ▶ $L(r_1 + r_2) = L(r_1) \cup L(r_2)$
- ▶ $L(r_1 r_2) = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L(r_1) \text{ y } w_2 \in L(r_2)\}$
- ▶ $L(r_1^*) = \{\varepsilon\} \cup \left(\bigcup_{i \geq 1} L(r_1^i) \right)$, donde $r_1^i = \underbrace{(\cdots ((r_1 r_1) r_1) \cdots r_1)}_{i \text{ símbolos } r_1}$

Para recordar: Expresiones regulares

Ejemplo

De una expresión regular que acepte el mismo lenguaje que el siguiente autómata sobre el alfabeto $\{0, 1\}$:



Respuesta: $1^*(01^*01^*01^*)^*$

Para recordar: Equivalencia entre autómatas y expresiones regulares

Dado: Lenguaje L sobre un alfabeto Σ

Teorema

L es regular (aceptado por un autómata) si y sólo si existe una expresión regular r sobre Σ tal que $L = L(r)$

Palabras como estructuras

Dado: Alfabeto Σ

Vamos a representar las palabras sobre Σ como estructuras sobre el vocabulario:

$$\mathcal{L}_\Sigma = \{P_a(\cdot) \mid a \in \Sigma\} \cup \{<\}$$

Palabras como estructuras

Notación

Una palabra $w = a_0 \cdots a_{n-1}$ ($n \geq 1$) sobre el alfabeto Σ es representada como una $\mathcal{L}_\Sigma$ -estructura $\mathfrak{A}_w$:

- ▶ dominio de $\mathfrak{A}_w$ es $\{0, \dots, n-1\}$
- ▶ $P_a^{\mathfrak{A}_w} = \{i \mid a_i = a\}$, para cada $a \in \Sigma$
- ▶ $<^{\mathfrak{A}_w}$ es el orden lineal usual sobre $\{0, \dots, n-1\}$

Además: La palabra vacía ε es representada como la $\mathcal{L}_\Sigma$ -estructura $\mathfrak{A}_\varepsilon$ con dominio vacío.

Palabras como estructuras: Ejemplos

Ejemplos

- Si $\Sigma = \{0, 1\}$ y $w = 01101$, entonces $\mathcal{L}_\Sigma = \{P_0(\cdot), P_1(\cdot), <\}$ y:

$$\mathfrak{A}_w = \langle \{0, 1, 2, 3, 4\}, P_0^{\mathfrak{A}_w} = \{0, 3\}, P_1^{\mathfrak{A}_w} = \{1, 2, 4\}, <^{\mathfrak{A}_w} \rangle$$

- Si $\Sigma = \{a, b, c\}$ y $w = caaa$, entonces $\mathcal{L}_\Sigma = \{P_a(\cdot), P_b(\cdot), P_c(\cdot), <\}$ y:

$$\mathfrak{A}_w = \langle \{0, 1, 2, 3\}, P_a^{\mathfrak{A}_w} = \{1, 2, 3\},$$

$$P_b^{\mathfrak{A}_w} = \emptyset, P_c^{\mathfrak{A}_w} = \{0\}, <^{\mathfrak{A}_w} \rangle$$

Lenguajes definidos por una lógica

Dado: Alfabeto Σ

Un lenguaje L sobre Σ puede ser definido por una máquina.

- ▶ L es un lenguaje regular si es aceptado por un autómata

Pero un lenguaje L sobre Σ también puede ser definido por una lógica $\mathcal{LO}$.

- ▶ Dada una oración Φ en $\mathcal{LO}$ sobre el vocabulario $\mathcal{L}_\Sigma$:

$$L(\Phi) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathfrak{A}_w \models \Phi\}$$

- ▶ L es definible en $\mathcal{LO}$ si existe una oración Φ en $\mathcal{LO}$ sobre el vocabulario $\mathcal{L}_\Sigma$ tal que $L = L(\Phi)$

Lenguajes definidos por una lógica: Ejercicios

Ejercicios

Sea $\Sigma = \{0, 1\}$

1. ¿Es el lenguaje 0^*1^* definible en LPO?
2. ¿Es el lenguaje $(00)^*$ definible en LPO?
3. ¿Es el lenguaje $(01)^*$ definible en LPO?
4. ¿En qué lógica es definible el lenguaje $(000)^*$?