Nociones de localidad

IIC3263

Supuestos

- En el resto del curso nos vamos a concentrar en la clase de los modelos finitos
- En la primera parte de este capítulo consideramos vocabularios sin constantes
  - En la última parte del capítulo eliminamos esta restricción

Notación: Grafo de Gaifman

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$

Notación: Grafo de Gaifman

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$

Definición

El Grafo de Gaifman de $\mathfrak{A}$, denotado como $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$, contiene los siguientes elementos:

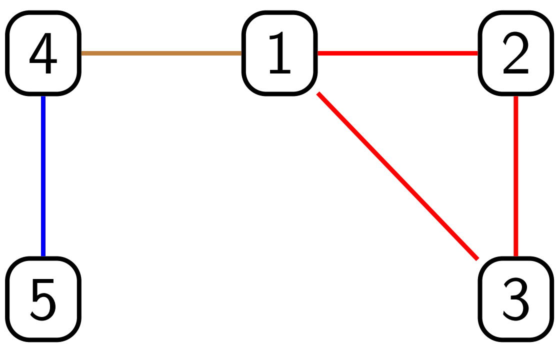
- *Nodos: Dominio A de $\mathfrak{A}$*
- *Arcos: (a_1, a_2) es un arco en $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ si y sólo si $a_1 \neq a_2$ y existe $R \in \mathcal{L}$ y una tupla $\bar{t} \in R^{\mathfrak{A}}$ que menciona a a_1 y a_2*

Grafo de Gaifman: Ejemplo

Si $\mathfrak{A}$ es la estructura $\langle A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2, 3)\},$ $T^{\mathfrak{A}} = \{(1, 4),\ (4, 5)\}\rangle$, entonces $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ es el siguiente grafo:

Grafo de Gaifman: Ejemplo

Si $\mathfrak{A}$ es la estructura $\langle A = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2, 3)\}, T^{\mathfrak{A}} = \{(1, 4), (4, 5)\}\rangle$, entonces $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ es el siguiente grafo:



Vecindarios

Notación

$d_{\mathfrak{A}}(a, b)$: *Distancia entre* a *y* b *en* $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$

$d_{\mathfrak{A}}(\bar{a}, b)$: *Menor valor de* $d_{\mathfrak{A}}(a, b)$, *para* a *en* $\bar{a}$

$N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$: *Subestructura de* $\mathfrak{A}$ *inducida por los elementos a distancia a lo más* d *de* $\bar{a}$

- *Elementos en* $\bar{a}$ *son tratados como constantes*

Vecindarios: Ejemplo

Nuevamente sea $\mathfrak{A}$ la estructura $\langle A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2, 3)\}$, $T^{\mathfrak{A}} = \{(1, 4), (4, 5)\}\rangle$.

Vecindarios: Ejemplo

Nuevamente sea $\mathfrak{A}$ la estructura $\langle A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2, 3)\}$, $T^{\mathfrak{A}} = \{(1, 4), (4, 5)\}\rangle$.

Vocabulario de $N_2^{\mathfrak{A}}(5)$: $\{R(\cdot, \cdot, \cdot),\ T(\cdot, \cdot),\ c\}$

Vecindarios: Ejemplo

Nuevamente sea $\mathfrak{A}$ la estructura $\langle A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2, 3)\}$, $T^{\mathfrak{A}} = \{(1, 4), (4, 5)\}\rangle$.

Vocabulario de $N_2^{\mathfrak{A}}(5)$: $\{R(\cdot, \cdot, \cdot),\ T(\cdot, \cdot),\ c\}$

- Dominio de $N_2^{\mathfrak{A}}(5)$ es $N = \{1, 4, 5\}$
- $R^{N_2^{\mathfrak{A}}(5)} = \emptyset$
- $T^{N_2^{\mathfrak{A}}(5)} = \{(1, 4), (4, 5)\}$
- $c^{N_2^{\mathfrak{A}}(5)} = 5$

Vecindarios: Ejemplo

Nuevamente sea $\mathfrak{A}$ la estructura $\langle A = \{1,2,3,4,5\}$, $R^{\mathfrak{A}} = \{(1,2,3)\}$, $T^{\mathfrak{A}} = \{(1,4), (4,5)\}\rangle$.

Vocabulario de $N_2^{\mathfrak{A}}(5)$: $\{R(\cdot,\cdot,\cdot),\ T(\cdot,\cdot),\ c\}$

- Dominio de $N_2^{\mathfrak{A}}(5)$ es $N = \{1,4,5\}$
- $R^{N_2^{\mathfrak{A}}(5)} = \emptyset$
- $T^{N_2^{\mathfrak{A}}(5)} = \{(1,4),(4,5)\}$
- $c^{N_2^{\mathfrak{A}}(5)} = 5$

Notación

Para $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, usamos $N_d^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)$ como notación alternativa para $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$.

Isomorfismo de vecindarios

Dados: Vecindarios $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$ y $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{b})$, donde $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ y $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$

Si f es un isomorfismo entre $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$ y $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{b})$, entonces $f(a_i) = b_i$, para todo $1 \leq i \leq m$

- ¿Por qué?

Isomorfismo de vecindarios

Dados: Vecindarios $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$ y $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{b})$, donde $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ y $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$

Si f es un isomorfismo entre $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$ y $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{b})$, entonces $f(a_i) = b_i$, para todo $1 \leq i \leq m$

- ¿Por qué?

Notación

$N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \cong N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{b})$

Primera noción: Localidad de Gaifman

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Teorema (Gaifman)

Para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(\bar{x})$ en LPO, existe un número d tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y tuplas $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\mathfrak{A}$:

$$N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \cong N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{b})$$

Primera noción: Localidad de Gaifman

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Teorema (Gaifman)

Para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(\bar{x})$ en LPO, existe un número d tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y tuplas $\bar{a}$, $\bar{b}$ en $\mathfrak{A}$:

$$N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \cong N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \textit{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{b})$$

¿Cómo podemos usar este teorema para demostrar que una propiedad no es expresable en LPO?

Localidad de Gaifman: Dos ejemplos

Ejercicios

Usando el teorema de Gaifman demuestre que las siguientes propiedades no son expresables en lógica de primer orden:

1. Clausura transitiva: Determinar si existe un camino entre dos nodos de un grafo
2. Misma generación: Determinar si en un árbol dos nodos están en la misma generación

Localidad de Gaifman: Dos ejemplos

Ejercicios

Usando el teorema de Gaifman demuestre que las siguientes propiedades no son expresables en lógica de primer orden:

1. Clausura transitiva: Determinar si existe un camino entre dos nodos de un grafo
2. Misma generación: Determinar si en un árbol dos nodos están en la misma generación

¿Qué tan difícil es resolver estos problemas usando juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé?

Primer ejercicio: Clausura transitiva

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Por contradicción: Suponga que existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x, y)$ en LPO tal que para cada $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y par de puntos a, b en $\mathfrak{A}$:

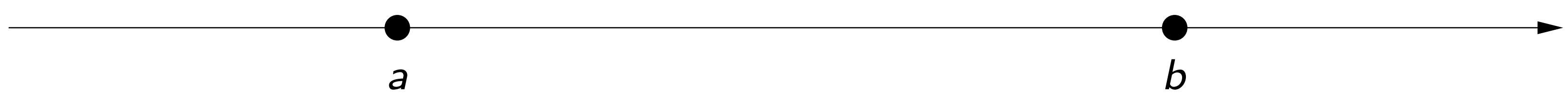
- $\mathfrak{A} \models \varphi(a, b)$ si y sólo si existe un camino desde a a b en el grafo representado por $\mathfrak{A}$

Por Teorema de Gaifman: Existe d tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y tuplas (a_1, b_1), (a_2, b_2) en $\mathfrak{A}$:

- Si $N_d^{\mathfrak{A}}(a_1, b_1) \cong N_d^{\mathfrak{A}}(a_2, b_2)$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, b_1)$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi(a_2, b_2)$

Primer ejercicio: Clausura transitiva

Sea $\mathfrak{A}$ una estructura tal que $E^{\mathfrak{A}}$ es la siguiente relación de sucesor:



Donde:

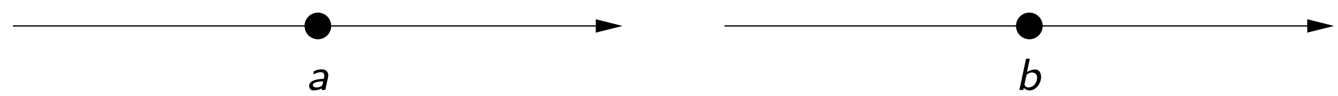
- La distancia entre a y el primer punto de $E^{\mathfrak{A}}$ es mayor que d
- La distancia entre b y a es mayor que $2 \cdot d + 1$
- La distancia entre el último punto de $E^{\mathfrak{A}}$ y b es mayor que d

Primer ejercicio: Clausura transitiva

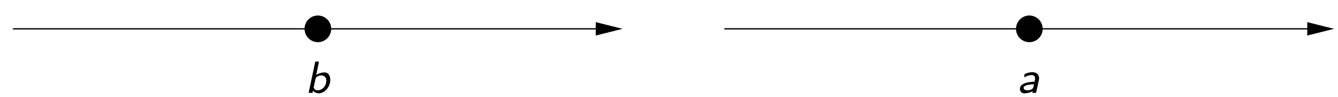
$N_d^{\mathfrak{A}}(a, b)$ es la siguiente estructura:

Primer ejercicio: Clausura transitiva

$N_d^{\mathfrak{A}}(a, b)$ es la siguiente estructura:



$N_d^{\mathfrak{A}}(b, a)$ es la siguiente estructura:



Primer ejercicio: Clausura transitiva

$N_d^{\mathfrak{A}}(a, b)$ es la siguiente estructura:

$N_d^{\mathfrak{A}}(b, a)$ es la siguiente estructura:

Por lo tanto: $N_d^{\mathfrak{A}}(a, b) \cong N_d^{\mathfrak{A}}(b, a)$

- Por hipótesis: $\mathfrak{A} \models \varphi(a, b)$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi(b, a)$

Primer ejercicio: Clausura transitiva

$N_d^{\mathfrak{A}}(a, b)$ es la siguiente estructura:

$N_d^{\mathfrak{A}}(b, a)$ es la siguiente estructura:

Por lo tanto: $N_d^{\mathfrak{A}}(a, b) \cong N_d^{\mathfrak{A}}(b, a)$

- Por hipótesis: $\mathfrak{A} \models \varphi(a, b)$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi(b, a)$

Pero: $\mathfrak{A} \models \varphi(a, b)$ y $\mathfrak{A} \not\models \varphi(b, a)$

- ¡Tenemos una contradicción! $\square$

Segundo ejercicio: Misma generación

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Ahora suponga que $\psi(x, y)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula en LPO tal que para cada $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{B}$ que representa un árbol y puntos a, b en $\mathfrak{B}$:

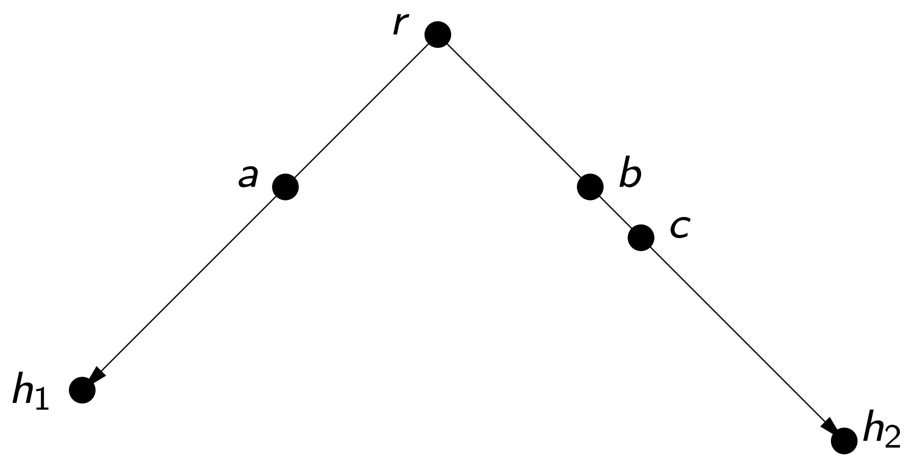
- $\mathfrak{B} \models \psi(a, b)$ si y sólo si a y b están en la misma generación en el árbol representado por $\mathfrak{B}$

Por Teorema de Gaifman: Existe d tal que para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{B}$ y tuplas (a_1, b_1), (a_2, b_2) en $\mathfrak{B}$:

- Si $N_d^{\mathfrak{B}}(a_1, b_1) \cong N_d^{\mathfrak{B}}(a_2, b_2)$, entonces $\mathfrak{B} \models \psi(a_1, b_1)$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \psi(a_2, b_2)$

Segundo ejercicio: Misma generación

Sea $\mathfrak{B}$ una estructura tal que $E^{\mathfrak{B}}$ es el siguiente árbol:

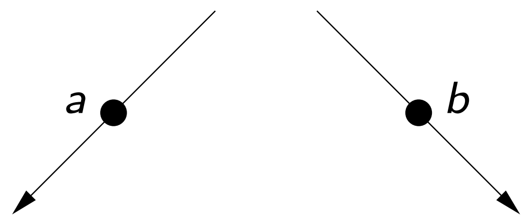


Donde:

- $d_{\mathfrak{B}}(a, r) = d_{\mathfrak{B}}(b, r) > d$
  - a y b están en la misma generación
- $(b, c) \in E^{\mathfrak{B}}$
- $d_{\mathfrak{B}}(h_1, a) = d_{\mathfrak{B}}(h_2, c) > d$

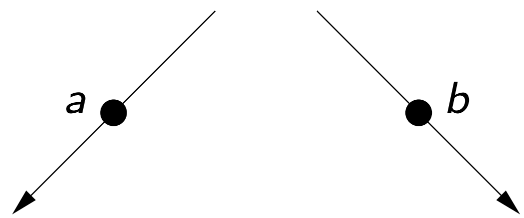
Segundo ejercicio: Misma generación

$N_d^{\mathfrak{B}}(a, b)$ es la siguiente estructura:

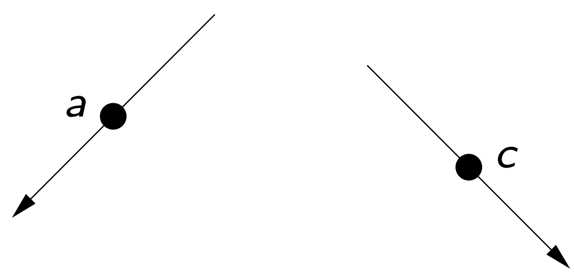


Segundo ejercicio: Misma generación

$N_d^{\mathfrak{B}}(a, b)$ es la siguiente estructura:



$N_d^{\mathfrak{B}}(a, c)$ es la siguiente estructura:



Segundo ejercicio: Misma generación

Por lo tanto: $N_d^{\mathfrak{B}}(a, b) \cong N_d^{\mathfrak{B}}(a, c)$

- Por hipótesis: $\mathfrak{B} \models \psi(a, b)$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \psi(a, c)$

Segundo ejercicio: Misma generación

Por lo tanto: $N_d^{\mathfrak{B}}(a, b) \cong N_d^{\mathfrak{B}}(a, c)$

- Por hipótesis: $\mathfrak{B} \models \psi(a, b)$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \psi(a, c)$

Pero: $\mathfrak{B} \models \psi(a, b)$ y $\mathfrak{B} \not\models \psi(a, c)$

- ¡Tenemos una contradicción! $\square$