

Nociones de localidad

IIC3263

Supuestos

- ▶ En el resto del curso nos vamos a concentrar en la clase de los modelos finitos
- ▶ En la primera parte de este capítulo consideramos vocabularios sin constantes
 - ▶ En la última parte del capítulo eliminamos esta restricción

Notación: Grafo de Gaifman

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$

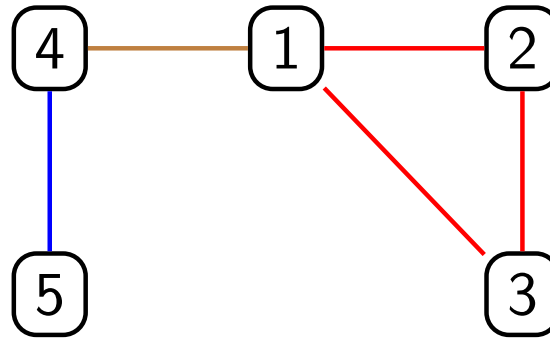
Definición

El *Grafo de Gaifman de $\mathfrak{A}$* , denotado como $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$, contiene los siguientes elementos:

- ▶ *Nodos: Dominio A de $\mathfrak{A}$*
- ▶ *Arcos: (a_1, a_2) es un arco en $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ si y sólo si $a_1 \neq a_2$ y existe $R \in \mathcal{L}$ y una tupla $\bar{t} \in R^{\mathfrak{A}}$ que menciona a a_1 y a_2*

Grafo de Gaifman: Ejemplo

Si $\mathfrak{A}$ es la estructura $\langle A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2, 3)\}, T^{\mathfrak{A}} = \{(1, 4), (4, 5)\}\rangle$, entonces $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$ es el siguiente grafo:



Vecindarios

Notación

$d_{\mathfrak{A}}(a, b)$: Distancia entre a y b en $\mathcal{G}(\mathfrak{A})$

$d_{\mathfrak{A}}(\bar{a}, b)$: Menor valor de $d_{\mathfrak{A}}(a, b)$, para a en $\bar{a}$

$N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$: Subestructura de $\mathfrak{A}$ inducida por los elementos a distancia a lo más d de $\bar{a}$

- Elementos en $\bar{a}$ son tratados como constantes

Vecindarios: Ejemplo

Nuevamente sea $\mathfrak{A}$ la estructura $\langle A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2, 3)\}, T^{\mathfrak{A}} = \{(1, 4), (4, 5)\} \rangle$.

Vocabulario de $N_2^{\mathfrak{A}}(5)$: $\{R(\cdot, \cdot, \cdot), T(\cdot, \cdot), c\}$

- ▶ Dominio de $N_2^{\mathfrak{A}}(5)$ es $N = \{1, 4, 5\}$
- ▶ $R^{N_2^{\mathfrak{A}}(5)} = \emptyset$
- ▶ $T^{N_2^{\mathfrak{A}}(5)} = \{(1, 4), (4, 5)\}$
- ▶ $c^{N_2^{\mathfrak{A}}(5)} = 5$

Notación

Para $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$, usamos $N_d^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_m)$ como notación alternativa para $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$.

Isomorfismo de vecindarios

Dados: Vecindarios $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$ y $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{b})$, donde $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ y $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$

Si f es un isomorfismo entre $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$ y $N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{b})$, entonces $f(a_i) = b_i$, para todo $1 \leq i \leq m$

► ¿Por qué?

Notación

$$N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \cong N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{b})$$

Primera noción: Localidad de Gaifman

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Teorema (Gaifman)

Para cada $\mathcal{L}$ -fórmula $\varphi(\bar{x})$ en LPO, existe un número d tal que para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ y tuplas $\bar{a}, \bar{b}$ en $\mathfrak{A}$:

$$N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) \cong N_d^{\mathfrak{A}}(\bar{b}) \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{a}) \text{ si y sólo si } \mathfrak{A} \models \varphi(\bar{b})$$

¿Cómo podemos usar este teorema para demostrar que una propiedad no es expresable en LPO?

Localidad de Gaifman: Dos ejemplos

Ejercicios

Usando el teorema de Gaifman demuestre que las siguientes propiedades no son expresables en lógica de primer orden:

1. **Clausura transitiva:** Determinar si existe un camino entre dos nodos de un grafo
2. **Misma generación:** Determinar si en un árbol dos nodos están en la misma generación

¿Qué tan difícil es resolver estos problemas usando juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé?

Primer ejercicio: Clausura transitiva

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Por contradicción: Suponga que existe una $\mathcal{L}$ -fórmula $\varphi(x, y)$ en LPO tal que para cada $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ y par de puntos a, b en $\mathfrak{A}$:

- $\mathfrak{A} \models \varphi(a, b)$ si y sólo si existe un camino desde a a b en el grafo representado por $\mathfrak{A}$

Por Teorema de Gaifman: Existe d tal que para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ y tuplas $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ en $\mathfrak{A}$:

- Si $N_d^{\mathfrak{A}}(a_1, b_1) \cong N_d^{\mathfrak{A}}(a_2, b_2)$, entonces $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, b_1)$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi(a_2, b_2)$

Primer ejercicio: Clausura transitiva

Sea $\mathfrak{A}$ una estructura tal que $E^{\mathfrak{A}}$ es la siguiente relación de sucesor:

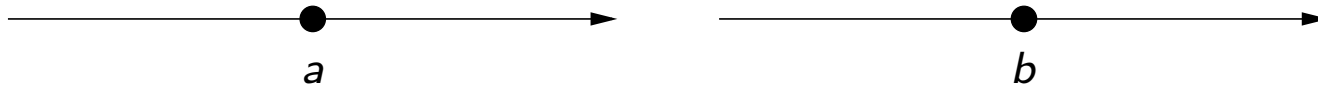


Donde:

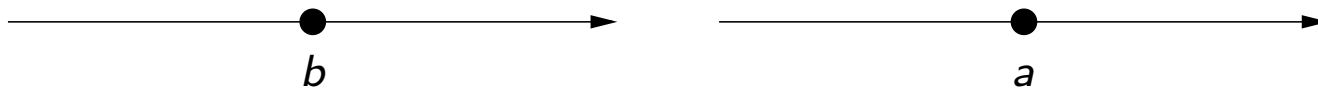
- ▶ La distancia entre a y el primer punto de $E^{\mathfrak{A}}$ es mayor que d
- ▶ La distancia entre b y a es mayor que $2 \cdot d + 1$
- ▶ La distancia entre el último punto de $E^{\mathfrak{A}}$ y b es mayor que d

Primer ejercicio: Clausura transitiva

$N_d^{\mathfrak{A}}(a, b)$ es la siguiente estructura:



$N_d^{\mathfrak{A}}(b, a)$ es la siguiente estructura:



Por lo tanto: $N_d^{\mathfrak{A}}(a, b) \cong N_d^{\mathfrak{A}}(b, a)$

► Por hipótesis: $\mathfrak{A} \models \varphi(a, b)$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi(b, a)$

Pero: $\mathfrak{A} \models \varphi(a, b)$ y $\mathfrak{A} \not\models \varphi(b, a)$

► ¡Tenemos una contradicción!

□

Segundo ejercicio: Misma generación

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Ahora suponga que $\psi(x, y)$ es una $\mathcal{L}$ -fórmula en LPO tal que para cada $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{B}$ **que representa un árbol** y puntos a, b en $\mathfrak{B}$:

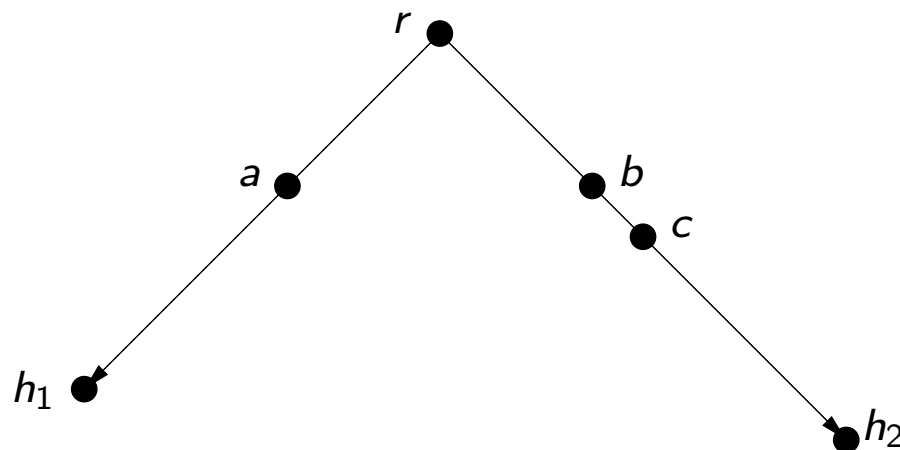
- ▶ $\mathfrak{B} \models \psi(a, b)$ si y sólo si a y b están en la misma generación en el árbol representado por $\mathfrak{B}$

Por Teorema de Gaifman: Existe d tal que para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{B}$ y tuplas $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ en $\mathfrak{B}$:

- ▶ Si $N_d^{\mathfrak{B}}(a_1, b_1) \cong N_d^{\mathfrak{B}}(a_2, b_2)$, entonces $\mathfrak{B} \models \psi(a_1, b_1)$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \psi(a_2, b_2)$

Segundo ejercicio: Misma generación

Sea $\mathfrak{B}$ una estructura tal que $E^{\mathfrak{B}}$ es el siguiente árbol:

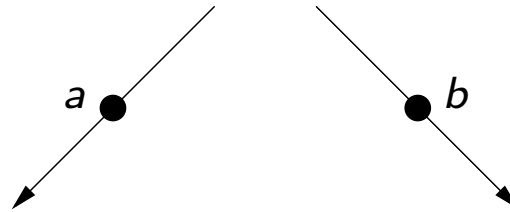


Donde:

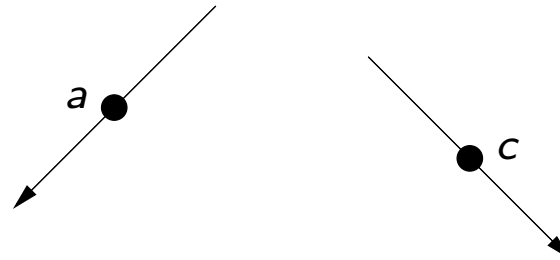
- ▶ $d_{\mathfrak{B}}(a, r) = d_{\mathfrak{B}}(b, r) > d$
 - ▶ a y b están en la misma generación
- ▶ $(b, c) \in E^{\mathfrak{B}}$
- ▶ $d_{\mathfrak{B}}(h_1, a) = d_{\mathfrak{B}}(h_2, c) > d$

Segundo ejercicio: Misma generación

$N_d^{\mathfrak{B}}(a, b)$ es la siguiente estructura:



$N_d^{\mathfrak{B}}(a, c)$ es la siguiente estructura:



Segundo ejercicio: Misma generación

Por lo tanto: $N_d^{\mathfrak{B}}(a, b) \cong N_d^{\mathfrak{B}}(a, c)$

- ▶ Por hipótesis: $\mathfrak{B} \models \psi(a, b)$ si y sólo si $\mathfrak{B} \models \psi(a, c)$

Pero: $\mathfrak{B} \models \psi(a, b)$ y $\mathfrak{B} \not\models \psi(a, c)$

- ▶ ¡Tenemos una contradicción!

