

Ejemplo: Ordenes lineales finitos

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y $\mathcal{C}$ la clase de ordenes lineales finitos sobre $\mathcal{L}$.
Queremos demostrar que la siguiente propiedad no es expresable:

$$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{C} \mid |A| \text{ es par, donde } A \text{ es el dominio de } \mathfrak{A}\}$$

Ejemplo: Ordenes lineales finitos

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y $\mathcal{C}$ la clase de ordenes lineales finitos sobre $\mathcal{L}$.
Queremos demostrar que la siguiente propiedad no es expresable:

$$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{C} \mid |A| \text{ es par, donde } A \text{ es el dominio de } \mathfrak{A}\}$$

Suponemos que $\mathcal{P}$ es expresable en $\mathcal{C}$.

Ejemplo: Ordenes lineales finitos

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y $\mathcal{C}$ la clase de ordenes lineales finitos sobre $\mathcal{L}$.
Queremos demostrar que la siguiente propiedad no es expresable:

$$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{C} \mid |A| \text{ es par, donde } A \text{ es el dominio de } \mathfrak{A}\}$$

Suponemos que $\mathcal{P}$ es expresable en $\mathcal{C}$.

- Existe φ tal que para todo orden lineal finito $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos

Ejemplo: Ordenes lineales finitos

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y $\mathcal{C}$ la clase de ordenes lineales finitos sobre $\mathcal{L}$.
Queremos demostrar que la siguiente propiedad no es expresable:

$$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{C} \mid |A| \text{ es par, donde } A \text{ es el dominio de } \mathfrak{A}\}$$

Suponemos que $\mathcal{P}$ es expresable en $\mathcal{C}$.

- ▶ Existe φ tal que para todo orden lineal finito $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos

- ▶ $rc(\varphi) = k$

Ejemplo: Ordenes lineales finitos

Tenemos que encontrar estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ en $\mathcal{C}$ tales que:

- ▶ $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$,
- ▶ $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos y
- ▶ $\mathfrak{B}$ tiene un número impar de elementos.

Ejemplo: Ordenes lineales finitos

Tenemos que encontrar estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ en $\mathcal{C}$ tales que:

- ▶ $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$,
- ▶ $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos y
- ▶ $\mathfrak{B}$ tiene un número impar de elementos.

¿Cuan grandes tienen que ser los dominios de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$?

Ejemplo: Ordenes lineales finitos

Tenemos que encontrar estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ en $\mathcal{C}$ tales que:

- ▶ $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$,
- ▶ $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos y
- ▶ $\mathfrak{B}$ tiene un número impar de elementos.

¿Cuan grandes tienen que ser los dominios de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$?

- ▶ Con una fórmula con rango de cuantificación k , ¿De qué tamaño son la estructuras que podemos distinguir?

Lógica de primer orden y ordenes lineales

Definimos una familia de fórmulas $\alpha_n(x, y)$, para $n \geq 1$, de manera recursiva:

$$\alpha_1(x, y) \quad := \quad x < y,$$

$$\alpha_n(x, y) \quad := \quad \exists x_n (\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x, x_n) \wedge \alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x_n, y)).$$

Veamos cuáles son las propiedades fundamentales de estas fórmulas.

Rango de cuantificación de α_n

Lema

$$rc(\alpha_n(x, y)) = \lceil \log n \rceil.$$

Demostración: Por inducción en n . Para $n = 1$ se cumple trivialmente.

Supongamos que $n \geq 2$ y que la propiedad se cumple para todo número menor que n .

Por definición:

$$rc(\alpha_n(x, y)) = 1 + \max\{rc(\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x, x_n)), rc(\alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x_n, y))\}.$$

Rango de cuantificación de α_n

Por hipótesis de inducción:

$$rc(\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x, y)) = \lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil,$$

$$rc(\alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x, y)) = \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil.$$

Como $\log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \log \lceil \frac{n}{2} \rceil$, concluimos que:

$$rc(\alpha_n(x, y)) = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil.$$

Por demostrar: $\lceil \log n \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil$

Un poco de aritmética ...

Consideramos tres casos:

1. Suponemos que $n = 2^\ell$, donde $\ell \geq 1$. Entonces $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2^{\ell-1}$, por lo que:

$$\lceil \log n \rceil = \ell = 1 + (\ell - 1) = 1 + \lceil \log 2^{\ell-1} \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil.$$

2. Suponemos que $n = 2^\ell + 2c$, donde $\ell \geq 1$ y $0 < 2c < 2^\ell$.

Como $2^\ell < 2^\ell + 2c < 2^{\ell+1}$, concluimos que $\lceil \log n \rceil = \ell + 1$.

Como $0 < 2c < 2^\ell$, se tiene que $0 < c < 2^{\ell-1}$. Concluimos que $2^{\ell-1} < 2^{\ell-1} + c < 2^\ell$. Por lo tanto $\lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil = \ell$, ya que $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2^{\ell-1} + c$.

De todo lo anterior: $\lceil \log n \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil$

Un poco de aritmética ...

3. Suponemos que $n = 2^\ell + 2c + 1$, donde $\ell \geq 1$ y $1 \leq 2c + 1 < 2^\ell$.

Como $2^\ell < 2^\ell + 2c + 1 < 2^{\ell+1}$, concluimos que $\lceil \log n \rceil = \ell + 1$.

Como $1 \leq 2c + 1 < 2^\ell$, se tiene que $\frac{1}{2} \leq c + \frac{1}{2} < 2^{\ell-1}$. Entonces tenemos que $1 \leq c + 1 \leq 2^{\ell-1}$. Concluimos que $2^{\ell-1} < 2^{\ell-1} + c + 1 \leq 2^\ell$. Por lo tanto $\lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil = \ell$, ya que $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2^{\ell-1} + c + 1$.

De todo lo anterior: $\lceil \log n \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil$

□

Distancias medidas por α_n

Lema

Sea $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, \dots, m\}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$. Si $\mathfrak{A} \models \alpha_n(i, j)$, entonces $j - i \geq n$.

Demostración: Por inducción en n . Para $n = 1$ es fácil de verificar.

Sea $n \geq 2$ y supongamos que la propiedad se cumple para todo número menor que n .

Si $\mathfrak{A} \models \alpha_n(i, j)$, entonces existe k tal que $\mathfrak{A} \models \alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(i, k)$ y $\mathfrak{A} \models \alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(k, j)$.

Distancias medidas por α_n

Por hipótesis de inducción:

$$k - i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad \text{y} \quad j - k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Como $j - i = (j - k) + (k - i)$, concluimos que:

$$\begin{aligned} j - i &\geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ &= n \end{aligned}$$



Juegos y ordenes lineales

Corolario

Si un orden lineal $\mathfrak{A}$ satisface $\alpha_{2^k}(a, b)$, entonces la distancia entre a y b es al menos 2^k .

Juegos y ordenes lineales

Corolario

Si un orden lineal $\mathfrak{A}$ satisface $\alpha_{2^k}(a, b)$, entonces la distancia entre a y b es al menos 2^k .

Tenemos que:

- ▶ Con una fórmula con rango de cuantificación k podemos verificar si dos puntos están a distancia 2^k .
- ▶ $\mathfrak{A}$ tiene al menos $2^k + 1$ elementos.

Juegos y ordenes lineales

Corolario

Si un orden lineal $\mathfrak{A}$ satisface $\alpha_{2^k}(a, b)$, entonces la distancia entre a y b es al menos 2^k .

Tenemos que:

- ▶ Con una fórmula con rango de cuantificación k podemos verificar si dos puntos están a distancia 2^k .
- ▶ $\mathfrak{A}$ tiene al menos $2^k + 1$ elementos.

Tenemos una primera indicación de que si queremos $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ deben tener un número exponencial de elementos.

- ▶ Hagamos más precisa esta afirmación ...

Juegos y ordenes lineales

Dado: $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, \dots, m\}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle B = \{1, \dots, n\}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$.

- Pregunta original: ¿Cuan grandes tienen que ser m y n para que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$?

Juegos y ordenes lineales

Dado: $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, \dots, m\}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle B = \{1, \dots, n\}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$.

- Pregunta original: ¿Cuan grandes tienen que ser m y n para que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$?

Proposición

Si $m < n < 2^{k-1}$, entonces existe una oración φ tal que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$, $\mathfrak{B} \models \varphi$ y $rc(\varphi) \leq k$.

Juegos y ordenes lineales

Dado: $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, \dots, m\}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle B = \{1, \dots, n\}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$.

- Pregunta original: ¿Cuan grandes tienen que ser m y n para que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$?

Proposición

Si $m < n < 2^{k-1}$, entonces existe una oración φ tal que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$, $\mathfrak{B} \models \varphi$ y $rc(\varphi) \leq k$.

Demostración: Sea

$$\varphi = \exists x (\exists y \alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(y, x) \wedge \exists z \alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}(x, z)).$$

Juegos y ordenes lineales

Se tiene que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ y $\mathfrak{B} \models \varphi$.

► ¿Por qué?

También se tiene que $rc(\varphi) = 2 + rc(\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(y, x)) = 2 + \lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil$.

Como $n < 2^{k-1}$, se tiene que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < 2^{k-2}$, por lo que $\lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil \leq k - 2$. Concluimos que $rc(\varphi) \leq k$. □

Juegos y ordenes lineales

Se tiene que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ y $\mathfrak{B} \models \varphi$.

► ¿Por qué?

También se tiene que $rc(\varphi) = 2 + rc(\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(y, x)) = 2 + \lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil$.

Como $n < 2^{k-1}$, se tiene que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < 2^{k-2}$, por lo que $\lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil \leq k - 2$. Concluimos que $rc(\varphi) \leq k$. □

Conclusión

Si queremos que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces $|A|$ y $|B|$ deben ser $\Omega(2^k)$.

Juegos y ordenes lineales

Se tiene que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ y $\mathfrak{B} \models \varphi$.

► ¿Por qué?

También se tiene que $rc(\varphi) = 2 + rc(\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(y, x)) = 2 + \lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil$.

Como $n < 2^{k-1}$, se tiene que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < 2^{k-2}$, por lo que $\lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil \leq k - 2$. Concluimos que $rc(\varphi) \leq k$. □

Conclusión

Si queremos que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces $|A|$ y $|B|$ deben ser $\Omega(2^k)$.

► Vamos a ver que esta es una buena estimación ...

Ordenes lineales indistinguibles

Dado: $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, \dots, m\}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle B = \{1, \dots, n\}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$.

Proposición

Si $m, n \geq 2^k + 1$, entonces $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$.

Demostración: Vamos a definir una estrategia ganadora para **D**.

Utilizamos una estrategia que en la ronda $\ell \leq k$ cumpla lo siguiente: Si las movidas en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $(a_1, \dots, a_\ell)$ y $(b_1, \dots, b_\ell)$, respectivamente, entonces para todo $1 \leq i, j \leq \ell$:

1a. si $|a_i - a_j| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| = |a_i - a_j|$;

1b. si $|a_i - 1| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - 1| = |a_i - 1|$;

1c. si $|a_i - m| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - n| = |a_i - m|$;

Ordenes lineales indistinguibles

2a. si $|a_i - a_j| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| \geq 2^{k-\ell}$;

2b. si $|a_i - 1| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - 1| \geq 2^{k-\ell}$;

2c. si $|a_i - m| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - n| \geq 2^{k-\ell}$;

3. $a_i < a_j$ si y sólo si $b_i < b_j$.

Cuando tomamos $\ell = k$, concluimos que gana **D**. ¿Por qué?

Ordenes lineales indistinguibles

2a. si $|a_i - a_j| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| \geq 2^{k-\ell}$;

2b. si $|a_i - 1| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - 1| \geq 2^{k-\ell}$;

2c. si $|a_i - m| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - n| \geq 2^{k-\ell}$;

3. $a_i < a_j$ si y sólo si $b_i < b_j$.

Cuando tomamos $\ell = k$, concluimos que gana **D**. ¿Por qué?

Vamos a demostrar por inducción en $\ell \leq k$ que **D** puede jugar de tal forma de cumplir las condiciones anteriores.

Ordenes lineales indistinguibles

Suponga que en la ronda $\ell < k$ las movidas en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $(a_1, \dots, a_\ell)$ y $(b_1, \dots, b_\ell)$, respectivamente.

Suponga que $\mathbf{S}$ decide jugar un punto $a_{\ell+1}$ en $\mathfrak{A}$ (si $\mathbf{S}$ juega un punto en $\mathfrak{B}$, la estrategia se define de la misma forma).

Tenemos tres casos posibles:

- ▶ Existe $i \in \{1, \dots, \ell\}$ tal que a_i es el menor elemento en $(a_1, \dots, a_\ell)$ y $1 \leq a_{\ell+1} \leq a_i$.
- ▶ Existe $i \in \{1, \dots, \ell\}$ tal que a_i es el mayor elemento en $(a_1, \dots, a_\ell)$ y $a_i \leq a_{\ell+1} \leq m$.
- ▶ Existen $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ tales que $a_i \leq a_j$, no existe un elemento entre ellos en $(a_1, \dots, a_\ell)$ y $a_i \leq a_{\ell+1} \leq a_j$.

Ordenes lineales indistinguibles

Vamos a ver como se define la estrategia en el tercer caso. Los otros dos casos son idénticos a este.

- ▶ Si $|a_i - a_j| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| = |a_i - a_j|$. Los intervalos $[a_i, a_j]$ en $\mathfrak{A}$ y $[b_i, b_j]$ en $\mathfrak{B}$ son isomorfos, por lo que es fácil definir $b_{\ell+1}$. ¿Cómo se define?
- ▶ Si $|a_i - a_j| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| \geq 2^{k-\ell}$. Para definir $b_{\ell+1}$ consideramos tres casos.
 - ▶ Si $|a_i - a_{\ell+1}| < 2^{k-(\ell+1)}$, entonces definimos $b_{\ell+1}$ como un punto en $\mathfrak{B}$ mayor o igual a b_i tal que $|a_i - a_{\ell+1}| = |b_i - b_{\ell+1}|$.
 - ▶ Si $|a_j - a_{\ell+1}| < 2^{k-(\ell+1)}$, entonces definimos $b_{\ell+1}$ como un punto en $\mathfrak{B}$ menor o igual a b_j tal que $|a_j - a_{\ell+1}| = |b_j - b_{\ell+1}|$.

Ordenes lineales indistinguibles

- ▶ Si $|a_i - a_{\ell+1}| \geq 2^{k-(\ell+1)}$ y $|a_j - a_{\ell+1}| \geq 2^{k-(\ell+1)}$, entonces definimos $b_{\ell+1}$ de la siguiente forma.

Sabemos que existe por lo menos un punto $b_i \leq b \leq b_j$ tal que $|b_i - b| \geq 2^{k-(\ell+1)}$ y $|b_j - b| \geq 2^{k-(\ell+1)}$. Definimos $b_{\ell+1}$ como uno de estos puntos.

Para terminar la demostración tenemos que demostrar que $(a_1, \dots, a_{\ell+1})$ y $(b_1, \dots, b_{\ell+1})$ satisfacen las condiciones iniciales.

- ▶ ¿Cómo se hace esto?



Paridad no es definible sobre ordenes lineales finitos

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$, $\mathcal{C}$ la clase de ordenes lineales finitos sobre $\mathcal{L}$ y

$$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{C} \mid |A| \text{ es par, donde } A \text{ es el dominio de } \mathfrak{A}\}.$$

Corolario

$\mathcal{P}$ no es definible en lógica de primer orden en $\mathcal{C}$.

Paridad no es definible sobre ordenes lineales finitos

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$, $\mathcal{C}$ la clase de ordenes lineales finitos sobre $\mathcal{L}$ y

$$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{C} \mid |A| \text{ es par, donde } A \text{ es el dominio de } \mathfrak{A}\}.$$

Corolario

$\mathcal{P}$ no es definible en lógica de primer orden en $\mathcal{C}$.

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

Volvemos a considerar vocabularios con constantes.

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

- ▶ Los dominios de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son A y B , respectivamente.

Decimos que $\mathfrak{B}$ es la sub-estructura de $\mathfrak{A}$ inducida por B si

- ▶ $B \subseteq A$
- ▶ para cada $c \in \mathcal{L}$, se tiene que $c^{\mathfrak{A}} \in B$ y $c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}}$
- ▶ para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k : $R^{\mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{A}} \cap B^k$

Terminología: Isomorfismo incluyendo constantes

Decimos que f es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si:

- ▶ f es una biyección
- ▶ Para cada $c \in \mathcal{L}$, se tiene que $f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$
- ▶ Para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k y $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$, se tiene que $(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $(f(a_1), \dots, f(a_k)) \in R^{\mathfrak{B}}$

Terminología: Isomorfismo incluyendo constantes

Decimos que f es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si:

- ▶ f es una biyección
- ▶ Para cada $c \in \mathcal{L}$, se tiene que $f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$
- ▶ Para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k y $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$, se tiene que $(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $(f(a_1), \dots, f(a_k)) \in R^{\mathfrak{B}}$

Notación

$\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son estructuras isomorfas, denotado como $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, si existe un isomorfismo f de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

¡El juego no cambia!

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

¡El juego no cambia!

Tablero	:	$\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$
Jugadores	:	Duplicator (D) y Spoiler (S)
Número de rondas	:	$k \geq 0$ (parámetro del juego)

En cada ronda:

1. **S** elige una estructura y un punto en esa estructura.
2. **D** responde con un punto en la otra estructura.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ que contiene constantes $\{c_1, \dots, c_\ell\}$.

Sean $(a_1, \dots, a_k)$ y $(b_1, \dots, b_k)$ los puntos jugados en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ que contiene constantes $\{c_1, \dots, c_\ell\}$.

Sean $(a_1, \dots, a_k)$ y $(b_1, \dots, b_k)$ los puntos jugados en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

► **S** gana el juego si

$$((c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_\ell^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_k), (c_1^{\mathfrak{B}}, \dots, c_\ell^{\mathfrak{B}}, b_1, \dots, b_k))$$

no es un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ que contiene constantes $\{c_1, \dots, c_\ell\}$.

Sean $(a_1, \dots, a_k)$ y $(b_1, \dots, b_k)$ los puntos jugados en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

- ▶ **S** gana el juego si

$$((c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_\ell^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_k), (c_1^{\mathfrak{B}}, \dots, c_\ell^{\mathfrak{B}}, b_1, \dots, b_k))$$

no es un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

- ▶ En caso contrario gana **D**.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ que contiene constantes $\{c_1, \dots, c_\ell\}$.

Sean $(a_1, \dots, a_k)$ y $(b_1, \dots, b_k)$ los puntos jugados en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

- ▶ **S** gana el juego si

$$((c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_\ell^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_k), (c_1^{\mathfrak{B}}, \dots, c_\ell^{\mathfrak{B}}, b_1, \dots, b_k))$$

no es un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

- ▶ En caso contrario gana **D**.

¿Por qué incluimos las constantes?

- ▶ Nótese que puede pasar que $\mathfrak{A} \not\equiv_0 \mathfrak{B}$. ¿Tiene sentido esto?

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Estrategia ganadora

Notación

D tiene una *estrategia ganadora* en el juego de Ehrenfeucht-Fraïssé de k rondas entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ si para cada posible forma de jugar de **S**, existe una forma de jugar de **D** que le permite ganar.

► $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Estrategia ganadora

Notación

D tiene una *estrategia ganadora* en el juego de Ehrenfeucht-Fraïssé de k rondas entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ si para cada posible forma de jugar de **S**, existe una forma de jugar de **D** que le permite ganar.

► $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Ejercicio

Sea $\mathcal{L} = \{<, \min, \max\}$ y $\mathcal{C}$ la clase de $\mathcal{L}$ -estructuras tales que $<$ es un orden lineal finito, $\min$ es el menor elemento de $<$ y $\max$ es el mayor elemento de $<$.

- Demuestre que para $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{C}$, si $|A|, |B| \geq 2^k + 1$, entonces $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$.

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$.

Notación

- ▶ $LPO[k]$ es el conjunto de $\mathcal{L}$ -oraciones en lógica de primer orden con rango de cuantificación a lo más k .

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$.

Notación

- ▶ $LPO[k]$ es el conjunto de $\mathcal{L}$ -oraciones en lógica de primer orden con rango de cuantificación a lo más k .
- ▶ Dos $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $LPO[k]$ si para cada $\varphi \in LPO[k]$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé

Teorema (Ehrenfeucht-Fraïssé)

Para todo par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$
2. $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $LPO[k]$

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé

Teorema (Ehrenfeucht-Fraïssé)

Para todo par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$
2. $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $LPO[k]$

Ejercicio

Use el teorema para demostrar que la clausura transitiva no es definible en lógica de primer orden sobre la relación sucesor.

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: Demostración

Dado: $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A y tupla $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ de elementos de A .

Notación

- ▶ $\mathcal{L}_m$: Resultado de extender $\mathcal{L}$ con m constantes nuevas $c_1, \dots, c_m$
- ▶ $(\mathfrak{A}, \bar{a})$: $\mathcal{L}_m$ -estructura tal que
 - ▶ $c^{(\mathfrak{A}, \bar{a})} = c^{\mathfrak{A}}$ para cada constante $c \in \mathcal{L}$
 - ▶ $R^{(\mathfrak{A}, \bar{a})} = R^{\mathfrak{A}}$ para cada relación $R \in \mathcal{L}$
 - ▶ $c_i^{(\mathfrak{A}, \bar{a})} = a_i$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: Demostración

Dado: $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A y tupla $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ de elementos de A .

Notación

- ▶ $\mathcal{L}_m$: Resultado de extender $\mathcal{L}$ con m constantes nuevas $c_1, \dots, c_m$
- ▶ $(\mathfrak{A}, \bar{a})$: $\mathcal{L}_m$ -estructura tal que
 - ▶ $c^{(\mathfrak{A}, \bar{a})} = c^{\mathfrak{A}}$ para cada constante $c \in \mathcal{L}$
 - ▶ $R^{(\mathfrak{A}, \bar{a})} = R^{\mathfrak{A}}$ para cada relación $R \in \mathcal{L}$
 - ▶ $c_i^{(\mathfrak{A}, \bar{a})} = a_i$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$

Para una tupla (a_1) , usamos la notación $(\mathfrak{A}, a_1)$ para $(\mathfrak{A}, (a_1))$

Tipo de una estructura

Una noción fundamental

Dadas variables $x_1, \dots, x_m$, el k -tipo de $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ es definido como:

$$\text{tp}_k(\mathfrak{A}, \bar{a}) = \{ \varphi(x_1, \dots, x_m) \mid \text{rc}(\varphi(x_1, \dots, x_m)) \leq k \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_m) \}.$$

Vamos a estudiar algunas propiedades fundamentales de la noción de tipo.

Tipo de una estructura: Resultados fundamentales

Lema

Si $\mathcal{L}$ es finito, entonces $tp_k(\mathfrak{A}, \bar{a})$ contiene un número finito de fórmulas *hasta equivalencia lógica*.

Demostración: Suponga que $\mathcal{L} = \{c_1, \dots, c_r, R_1, \dots, R_s\}$, donde la aridad de R_i es n_i ($1 \leq i \leq s$).

Por inducción en k , vamos a demostrar que *hasta equivalencia lógica* hay un número finito de fórmulas φ tal que:

- ▶ $rc(\varphi) \leq k$
- ▶ las variables libre de φ están contenidas en $\{x_1, \dots, x_m\}$

De lo anterior se deduce el lema. ¿Por qué?

Tipo de una estructura: Resultados fundamentales

- Suponga que $k = 0$.

La siguiente es una cota superior para el número de fórmulas no equivalentes con rango de cuantificación 0 y cuyas variables libres están en el conjunto $\{x_1, \dots, x_m\}$:

Tipo de una estructura: Resultados fundamentales

- Suponga que $k = 0$.

La siguiente es una cota superior para el número de fórmulas no equivalentes con rango de cuantificación 0 y cuyas variables libres están en el conjunto $\{x_1, \dots, x_m\}$:

$$2^2 \left[\left(\sum_{i=1}^s (r + m)^{n_i} \right) + (r + m)^2 \right]$$

¿Por qué?

Tipo de una estructura: Resultados fundamentales

- Suponga que la propiedad se cumple para k .

Sea φ una fórmula tal que $rc(\varphi) = k + 1$ y cuyas variables libres están contenidas en el conjunto $\{x_1, \dots, x_m\}$.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que φ es una combinación Booleana de fórmulas $\psi_1, \dots, \psi_n$, donde cada ψ_i satisface una de las siguientes condiciones:

1. $rc(\psi_i) \leq k$
2. $rc(\psi_i) = k + 1$ y $\psi_i = \exists x_{m+1} \alpha$, donde $rc(\alpha) = k$ y las variables libre de α están en el conjunto $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$
3. $rc(\psi_i) = k + 1$ y $\psi_i = \forall x_{m+1} \beta$, donde $rc(\beta) = k$ y las variables libre de β están en el conjunto $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$

Tipo de una estructura: Resultados fundamentales

Por hipótesis de inducción:

- ▶ existe un número finito de fórmulas con rango de cuantificación a los más k y cuyas variables libres están en el conjunto $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$

Concluimos que existe un número finito de fórmulas φ que satisfacen la condición en la transparencia anterior.

- ▶ Esto concluye la demostración del lema. ¿Por qué?



Tipo de una estructura: Resultados fundamentales

Sean $\mathfrak{A}$ una estructura sobre un vocabulario finito $\mathcal{L}$, y $\bar{a}$ una tupla con m elementos de $\mathfrak{A}$.

Corolario

Existe una fórmula $\varphi_{(\mathfrak{A}, \bar{a})}^k(x_1, \dots, x_m)$ tal que:

- ▶ $rc(\varphi_{(\mathfrak{A}, \bar{a})}^k(x_1, \dots, x_m)) = k$
- ▶ para cada $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{B}$ y tupla $\bar{b}$ con m elementos de $\mathfrak{B}$, se tiene que $\mathfrak{B} \models \varphi_{(\mathfrak{A}, \bar{a})}^k(\bar{b})$ si y sólo si $tp_k(\mathfrak{B}, \bar{b}) = tp_k(\mathfrak{A}, \bar{a})$

Tipo de una estructura: Resultados fundamentales

Sean $\mathfrak{A}$ una estructura sobre un vocabulario finito $\mathcal{L}$, y $\bar{a}$ una tupla con m elementos de $\mathfrak{A}$.

Corolario

Existe una fórmula $\varphi_{(\mathfrak{A}, \bar{a})}^k(x_1, \dots, x_m)$ tal que:

- ▶ $rc(\varphi_{(\mathfrak{A}, \bar{a})}^k(x_1, \dots, x_m)) = k$
- ▶ para cada $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{B}$ y tupla $\bar{b}$ con m elementos de $\mathfrak{B}$, se tiene que $\mathfrak{B} \models \varphi_{(\mathfrak{A}, \bar{a})}^k(\bar{b})$ si y sólo si $tp_k(\mathfrak{B}, \bar{b}) = tp_k(\mathfrak{A}, \bar{a})$

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: Demostración

Para demostrar el Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé usamos tipos y la relación $\simeq_k$ definida de la siguiente forma:

- ▶ $\mathfrak{A} \simeq_0 \mathfrak{B}$ si $\mathfrak{A} \equiv_0 \mathfrak{B}$
- ▶ $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$ si
 - forth** : Para cada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$
 - back** : Para cada $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: Versión extendida

Teorema (Ehrenfeucht-Fraïssé)

Para todo par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$
2. $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $LPO[k]$
3. $\mathfrak{A} \simeq_k \mathfrak{B}$

Demostración: $(1 \Leftrightarrow 3)$: Por inducción en k . Para $k = 0$ se tiene por definición.

Demostración de la versión extendida

Suponga que la propiedad se cumple para k .

- Suponga que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \equiv_{k+1} \mathfrak{B}$.

Suponga que $\mathbf{S}$ decide jugar a_1 en $\mathfrak{A}$. Entonces como $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$, existe b_1 en $\mathfrak{B}$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k (\mathfrak{B}, b_1)$.

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a_1) \equiv_k (\mathfrak{B}, b_1)$.

Por lo tanto: Para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \equiv_k (\mathfrak{B}, b)$.

Demostración de la versión extendida

De la misma forma, pero ahora usando back, concluimos que para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \equiv_k (\mathfrak{B}, b)$.

De lo anterior: $\mathfrak{A} \equiv_{k+1} \mathfrak{B}$.

- Suponga ahora que $\mathfrak{A} \equiv_{k+1} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$.

Sea $a \in A$ y suponga que **S** decide jugar este punto. Como **D** tiene una estrategia ganadora en el juego de $k + 1$ rondas entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, existe b en $\mathfrak{B}$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \equiv_k (\mathfrak{B}, b)$.

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

Demostración de la versión extendida

Por lo tanto: Para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

De la misma forma, pero ahora dejando jugar a **S** en $\mathfrak{B}$, concluimos que para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

De lo anterior: $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$.

Demostración de la versión extendida

(2 $\Leftrightarrow$ 3): Por inducción en k .

Para $k = 0$ se tiene la equivalencia. ¿Por qué?

Suponga que la equivalencia se tiene para k .

- ▶ Suponga que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $\text{LPO}[k + 1]$.
 - ▶ Para hacer esto nos basta con considerar el caso $\varphi = \exists x \psi(x)$ con $rc(\psi) = k$. ¿Por qué?

Si $\mathfrak{A} \models \exists x \psi(x)$, entonces existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi(a)$.

Como $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

Demostración de la versión extendida

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a)$ y $(\mathfrak{B}, b)$ están de acuerdo en $\text{LPO}[k]$.

Sea $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$. Como $(\mathfrak{A}, a) \models \psi(c)$, $rc(\psi(c)) = k$ y $(\mathfrak{A}, a)$, $(\mathfrak{B}, b)$ están de acuerdo en $\text{LPO}[k]$, se tiene que $(\mathfrak{B}, b) \models \psi(c)$.

Tenemos entonces que $\mathfrak{B} \models \psi(b)$, por lo que concluimos que $\mathfrak{B} \models \exists x \psi(x)$.

De la misma forma concluimos que si $\mathfrak{B} \models \exists x \psi(x)$, entonces $\mathfrak{A} \models \exists x \psi(x)$.

Demostración de la versión extendida

- Suponga que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $\text{LPO}[k + 1]$.
Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$.

Sea $a \in A$. Como $\mathfrak{A} \models \varphi_{(\mathfrak{A}, a)}^k(a)$, sabemos que
 $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi_{(\mathfrak{A}, a)}^k(x)$.

Puesto que $rc(\exists x \varphi_{(\mathfrak{A}, a)}^k(x)) = k + 1$, se tiene que
 $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi_{(\mathfrak{A}, a)}^k(x)$. Entonces, existe $b \in B$ tal que
 $\mathfrak{B} \models \varphi_{(\mathfrak{A}, a)}^k(b)$.

Demostración de la versión extendida

Por lo tanto: $\text{tp}_k(\mathfrak{A}, a) = \text{tp}_k(\mathfrak{B}, b)$, lo cual significa que $(\mathfrak{A}, a)$ y $(\mathfrak{B}, b)$ están de acuerdo en $\text{LPO}[k]$. Así, por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

Entonces: Para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

De la misma forma concluimos que para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

De lo anterior: $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$



Una estrategia completa

Corolario

*Una propiedad $\mathcal{P}$ no es expresable en lógica de primer orden **si y sólo si** para cada $k \geq 0$, existen $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}_k$ y $\mathfrak{B}_k$ tales que:*

- ▶ $\mathfrak{A}_k \in \mathcal{P}$
- ▶ $\mathfrak{B}_k \notin \mathcal{P}$
- ▶ $\mathfrak{A}_k \equiv_k \mathfrak{B}_k$

Una estrategia completa

Corolario

Una propiedad $\mathcal{P}$ no es expresable en lógica de primer orden **si y sólo si** para cada $k \geq 0$, existen $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}_k$ y $\mathfrak{B}_k$ tales que:

- ▶ $\mathfrak{A}_k \in \mathcal{P}$
- ▶ $\mathfrak{B}_k \notin \mathcal{P}$
- ▶ $\mathfrak{A}_k \equiv_k \mathfrak{B}_k$

Ejercicio

Demuestre la dirección ($\Leftarrow$) del corolario.

Una estrategia completa

Corolario

Una propiedad $\mathcal{P}$ no es expresable en lógica de primer orden *si y sólo si* para cada $k \geq 0$, existen $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}_k$ y $\mathfrak{B}_k$ tales que:

- ▶ $\mathfrak{A}_k \in \mathcal{P}$
- ▶ $\mathfrak{B}_k \notin \mathcal{P}$
- ▶ $\mathfrak{A}_k \equiv_k \mathfrak{B}_k$

Ejercicio

Demuestre la dirección ($\Leftarrow$) del corolario.

Vamos a demostrar la dirección ($\Rightarrow$) del corolario.

Una estrategia completa: Demostración

Demostración ($\Rightarrow$): Consideramos el contra-positivo del enunciado.

Suponga que existe $k \geq 0$ tal que para todo par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, se tiene que:

► Si $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ si y sólo si $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}$

Vamos a demostrar que bajo esta hipótesis $\mathcal{P}$ es definible en lógica de primer orden.

Una estrategia completa: Demostración

Sea Ψ la siguiente oración:

$$\bigvee_{\mathfrak{A} \in \mathcal{P}} \varphi_{\mathfrak{A}}^k$$

Podemos suponer que Ψ es una fórmula en lógica de primer orden porque **hasta equivalencia lógica** sólo existe un número finito de oraciones con rango de cuantificación k .

Vamos a demostrar que para cada $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B} \in \mathcal{P} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \Psi$$

Una estrategia completa: Demostración

($\Rightarrow$) Si $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}$, entonces $\mathfrak{B} \models \Psi$ ya que $\varphi_{\mathfrak{B}}^k$ es uno de los disyuntos de Ψ y $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{B}}^k$.

($\Leftarrow$) Suponga que $\mathfrak{B} \models \Psi$. Entonces existe $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}^k$.

Tenemos que $\text{tp}_k(\mathfrak{A}) = \text{tp}_k(\mathfrak{B})$, por lo que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $\text{LPO}[k]$.

Por teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Por hipótesis y dado que $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$, concluimos que $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}$

Una estrategia completa: Clases de estructuras

Sea $\mathcal{C}$ una clase de $\mathcal{L}$ -estructuras y $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$.

Una estrategia completa: Clases de estructuras

Sea $\mathcal{C}$ una clase de $\mathcal{L}$ -estructuras y $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$.

Corolario

$\mathcal{P}$ no es expresable en lógica de primer orden *en $\mathcal{C}$* si y sólo si para cada $k \geq 0$, existen $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k \in \mathcal{C}$ tales que:

- ▶ $\mathfrak{A}_k \in \mathcal{P}$
- ▶ $\mathfrak{B}_k \notin \mathcal{P}$
- ▶ $\mathfrak{A}_k \equiv_k \mathfrak{B}_k$

Una estrategia completa: Clases de estructuras

Sea $\mathcal{C}$ una clase de $\mathcal{L}$ -estructuras y $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$.

Corolario

$\mathcal{P}$ no es expresable en lógica de primer orden *en $\mathcal{C}$* si y sólo si para cada $k \geq 0$, existen $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k \in \mathcal{C}$ tales que:

- ▶ $\mathfrak{A}_k \in \mathcal{P}$
- ▶ $\mathfrak{B}_k \notin \mathcal{P}$
- ▶ $\mathfrak{A}_k \equiv_k \mathfrak{B}_k$

Vamos a demostrar la dirección ($\Rightarrow$) del corolario.

Una estrategia completa: Clases de estructuras

Demostración ($\Rightarrow$): Consideramos el contra-positivo del enunciado.

Suponga que existe $k \geq 0$ tal que **para todo par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{C}$** , se tiene que:

- ▶ Si $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ si y sólo si $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}$

Al igual que en el corolario anterior:

- ▶ Vamos a demostrar que bajo esta hipótesis $\mathcal{P}$ es definible en lógica de primer orden en $\mathcal{C}$.

Una estrategia completa: Clases de estructuras

Definimos Ψ como en la demostración anterior:

$$\bigvee_{\mathfrak{A} \in \mathcal{P}} \varphi_{\mathfrak{A}}^k$$

Vamos a demostrar que para cada $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$:

$$\mathfrak{B} \in \mathcal{P} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \Psi$$

($\Rightarrow$) Si $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}$, entonces $\mathfrak{B} \models \Psi$ ya que $\varphi_{\mathfrak{B}}^k$ es uno de los disyuntos de Ψ y $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{B}}^k$.

Una estrategia completa: Clases de estructuras

($\Leftarrow$) Suponga que $\mathfrak{B} \models \Psi$. Entonces existe $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}^k$.

► En particular, se tiene que $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$.

Tenemos que $\text{tp}_k(\mathfrak{A}) = \text{tp}_k(\mathfrak{B})$, por lo que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $\text{LPO}[k]$.

Por teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Dado que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{C}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ y $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$:

► Concluimos por hipótesis que $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}$

Una aplicación de los juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Decibilidad de una teoría

Para recordar ...

Un conjunto Σ de oraciones sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ es una teoría si:

- (1) Σ es satisfacible.
- (2) Σ es cerrado bajo consecuencia lógica: Si φ es una $\mathcal{L}$ -oración tal que $\Sigma \models \varphi$, entonces $\varphi \in \Sigma$.

Algunos ejemplos de teorías

Dado: Estructura $\mathfrak{A}$ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

Ejemplo clásico de teoría: La teoría de la estructura $\mathfrak{A}$

$$\text{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

Algunos ejemplos de teorías

Dado: Estructura $\mathfrak{A}$ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

Ejemplo clásico de teoría: La teoría de la estructura $\mathfrak{A}$

$$\text{Th}(\mathfrak{A}) = \{ \varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } \mathfrak{A} \models \varphi \}$$

Dos teorías fundamentales:

- ▶ Aritmética: $\text{Th}(\mathfrak{N})$
- ▶ Teoría de los números reales: $\text{Th}(\mathfrak{R})$

Algunos ejemplos de teorías

Dado: Conjunto consistente de oraciones Ax sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

Otro ejemplo clásico: La teoría del conjunto de axiomas Ax

$$\text{Th}(Ax) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } Ax \models \varphi\}$$

Algunos ejemplos de teorías

Dado: Conjunto consistente de oraciones Ax sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

Otro ejemplo clásico: La teoría del conjunto de axiomas Ax

$$\text{Th}(Ax) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } Ax \models \varphi\}$$

Un ejemplo de esto es la teoría de los ordenes lineales, la cual tiene los siguientes axiomas:

$$\forall x \neg(x < x)$$

$$\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$$

$$\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$$

Teorías completas

Para recordar ...

Una teoría Σ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ se dice completa si para cada $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\Sigma \models \varphi \quad \text{o} \quad \Sigma \models \neg\varphi$$

Ejemplo

$\text{Th}(\mathfrak{N})$ y $\text{Th}(\mathfrak{R})$ son teorías completas.

Caracterizando las teorías completas

También para recordar ...

Dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ son elementalmente equivalentes si para toda $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Caracterizando las teorías completas

También para recordar ...

Dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ son elementalmente equivalentes si para toda $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Teorema

Una teoría Σ es completa si y sólo si para cada par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ que satisfacen Σ , $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes.

Teorías finitamente axiomatizables

Sea Σ una teoría sobre un vocabulario $\mathcal{L}$.

Lo último para recordar ...

Σ es finitamente axiomatizable si existe un conjunto finito y consistente Ax de $\mathcal{L}$ -oraciones tal que $\Sigma = \text{Th}(Ax)$.

Teorías finitamente axiomatizables

Sea Σ una teoría sobre un vocabulario $\mathcal{L}$.

Lo último para recordar ...

Σ es finitamente axiomatizable si existe un conjunto finito y consistente Ax de $\mathcal{L}$ -oraciones tal que $\Sigma = Th(Ax)$.

Teorema

Si una teoría es finitamente axiomatizable y completa, entonces es decidable.

Teorías finitamente axiomatizables

Sea Σ una teoría sobre un vocabulario $\mathcal{L}$.

Lo último para recordar ...

Σ es finitamente axiomatizable si existe un conjunto finito y consistente Ax de $\mathcal{L}$ -oraciones tal que $\Sigma = Th(Ax)$.

Teorema

Si una teoría es finitamente axiomatizable y completa, entonces es decidable.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorías finitamente axiomatizables y completas: Un ejemplo clásico

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y OrdDen el siguiente conjunto de axiomas:

$$\forall x \neg(x < x)$$

$$\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$$

$$\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$$

$$\forall x \exists y (x < y)$$

$$\forall x \exists y (y < x)$$

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$$

$\text{Th}(\text{OrdDen})$ es la teoría de los ordenes lineales densos sin primer ni último elemento.

- $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ son modelos de esta teoría.

Teorías finitamente axiomatizables y completas: Un ejemplo clásico

Teorema

$Th(OrdDen)$ es una teoría completa y finitamente axiomatizable.

Corolario

$Th(OrdDen)$ es una teoría decidible.

Teorías finitamente axiomatizables y completas: Un ejemplo clásico

Teorema

$Th(OrdDen)$ es una teoría completa y finitamente axiomatizable.

Corolario

$Th(OrdDen)$ es una teoría decidible.

¿Cómo podemos demostrar que $Th(OrdDen)$ es una teoría completa?

Teorías finitamente axiomatizables y completas: Un ejemplo clásico

Teorema

$Th(OrdDen)$ es una teoría completa y finitamente axiomatizable.

Corolario

$Th(OrdDen)$ es una teoría decidible.

¿Cómo podemos demostrar que $Th(OrdDen)$ es una teoría completa?

- ▶ Los juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé vienen al rescate.

Th(OrdDen) es una teoría completa

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$, y suponga que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}$ -estructuras tales que $\mathfrak{A} \models \text{OrdDen}$ y $\mathfrak{B} \models \text{OrdDen}$.

Tenemos que demostrar que para cada $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Th(OrdDen) es una teoría completa

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$, y suponga que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}$ -estructuras tales que $\mathfrak{A} \models \text{OrdDen}$ y $\mathfrak{B} \models \text{OrdDen}$.

Tenemos que demostrar que para cada $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Para demostrar esto basta demostrar que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$ para todo $k \geq 0$

► ¿Por qué?

Th(OrdDen) es una teoría completa

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$, y suponga que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}$ -estructuras tales que $\mathfrak{A} \models \text{OrdDen}$ y $\mathfrak{B} \models \text{OrdDen}$.

Tenemos que demostrar que para cada $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Para demostrar esto basta demostrar que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$ para todo $k \geq 0$

► ¿Por qué?

Ejercicio

Demuestre la condición anterior.

Comentarios finales

¡Tenemos una estrategia completa para el problema de definibilidad en lógica de primer orden!

Comentarios finales

¡Tenemos una estrategia completa para el problema de definibilidad en lógica de primer orden!

- ▶ Puede ser utilizada incluso en clases de estructuras arbitrarias

Comentarios finales

¡Tenemos una estrategia completa para el problema de definibilidad en lógica de primer orden!

- ▶ Puede ser utilizada incluso en clases de estructuras arbitrarias
- ▶ Pero algunas veces es difícil de aplicar

Comentarios finales

¡Tenemos una estrategia completa para el problema de definibilidad en lógica de primer orden!

- ▶ Puede ser utilizada incluso en clases de estructuras arbitrarias
- ▶ Pero algunas veces es difícil de aplicar

Vamos a estudiar entonces estrategias que no son completas, pero si fáciles de aplicar.

Comentarios finales

¡Tenemos una estrategia completa para el problema de definibilidad en lógica de primer orden!

- ▶ Puede ser utilizada incluso en clases de estructuras arbitrarias
- ▶ Pero algunas veces es difícil de aplicar

Vamos a estudiar entonces estrategias que no son completas, pero si fáciles de aplicar.

- ▶ Vamos a estudiar algunas nociones de **localidad**