

Ejemplo: Ordenes lineales finitos

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y $\mathcal{C}$ la clase de ordenes lineales finitos sobre $\mathcal{L}$.
Queremos demostrar que la siguiente propiedad no es expresable:

$$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{C} \mid |A| \text{ es par, donde } A \text{ es el dominio de } \mathfrak{A}\}$$

Suponemos que $\mathcal{P}$ es expresable en $\mathcal{C}$.

- ▶ Existe φ tal que para todo orden lineal finito $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos

- ▶ $rc(\varphi) = k$

Ejemplo: Ordenes lineales finitos

Tenemos que encontrar estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ en $\mathcal{C}$ tales que:

- ▶ $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$,
- ▶ $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos y
- ▶ $\mathfrak{B}$ tiene un número impar de elementos.

¿Cuan grandes tienen que ser los dominios de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$?

- ▶ Con una fórmula con rango de cuantificación k , ¿De qué tamaño son la estructuras que podemos distinguir?

Lógica de primer orden y ordenes lineales

Definimos una familia de fórmulas $\alpha_n(x, y)$, para $n \geq 1$, de manera recursiva:

$$\alpha_1(x, y) \quad := \quad x < y,$$

$$\alpha_n(x, y) \quad := \quad \exists x_n (\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x, x_n) \wedge \alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x_n, y)).$$

Veamos cuáles son las propiedades fundamentales de estas fórmulas.

Rango de cuantificación de α_n

Lema

$$rc(\alpha_n(x, y)) = \lceil \log n \rceil.$$

Demostración: Por inducción en n . Para $n = 1$ se cumple trivialmente.

Supongamos que $n \geq 2$ y que la propiedad se cumple para todo número menor que n .

Por definición:

$$rc(\alpha_n(x, y)) = 1 + \max\{rc(\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x, x_n)), rc(\alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x_n, y))\}.$$

Rango de cuantificación de α_n

Por hipótesis de inducción:

$$rc(\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(x, y)) = \lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil,$$

$$rc(\alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(x, y)) = \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil.$$

Como $\log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \log \lceil \frac{n}{2} \rceil$, concluimos que:

$$rc(\alpha_n(x, y)) = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil.$$

Por demostrar: $\lceil \log n \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil$

Un poco de aritmética ...

Consideramos tres casos:

1. Suponemos que $n = 2^\ell$, donde $\ell \geq 1$. Entonces $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2^{\ell-1}$, por lo que:

$$\lceil \log n \rceil = \ell = 1 + (\ell - 1) = 1 + \lceil \log 2^{\ell-1} \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil.$$

2. Suponemos que $n = 2^\ell + 2c$, donde $\ell \geq 1$ y $0 < 2c < 2^\ell$.

Como $2^\ell < 2^\ell + 2c < 2^{\ell+1}$, concluimos que $\lceil \log n \rceil = \ell + 1$.

Como $0 < 2c < 2^\ell$, se tiene que $0 < c < 2^{\ell-1}$. Concluimos que $2^{\ell-1} < 2^{\ell-1} + c < 2^\ell$. Por lo tanto $\lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil = \ell$, ya que $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2^{\ell-1} + c$.

De todo lo anterior: $\lceil \log n \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil$

Un poco de aritmética ...

3. Suponemos que $n = 2^\ell + 2c + 1$, donde $\ell \geq 1$ y $1 \leq 2c + 1 < 2^\ell$.

Como $2^\ell < 2^\ell + 2c + 1 < 2^{\ell+1}$, concluimos que $\lceil \log n \rceil = \ell + 1$.

Como $1 \leq 2c + 1 < 2^\ell$, se tiene que $\frac{1}{2} \leq c + \frac{1}{2} < 2^{\ell-1}$. Entonces tenemos que $1 \leq c + 1 \leq 2^{\ell-1}$. Concluimos que $2^{\ell-1} < 2^{\ell-1} + c + 1 \leq 2^\ell$. Por lo tanto $\lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil = \ell$, ya que $\lceil \frac{n}{2} \rceil = 2^{\ell-1} + c + 1$.

De todo lo anterior: $\lceil \log n \rceil = 1 + \lceil \log \lceil \frac{n}{2} \rceil \rceil$

□

Distancias medidas por α_n

Lema

Sea $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, \dots, m\}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$. Si $\mathfrak{A} \models \alpha_n(i, j)$, entonces $j - i \geq n$.

Demostración: Por inducción en n . Para $n = 1$ es fácil de verificar.

Sea $n \geq 2$ y supongamos que la propiedad se cumple para todo número menor que n .

Si $\mathfrak{A} \models \alpha_n(i, j)$, entonces existe k tal que $\mathfrak{A} \models \alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(i, k)$ y $\mathfrak{A} \models \alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}(k, j)$.

Distancias medidas por α_n

Por hipótesis de inducción:

$$k - i \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \quad \text{y} \quad j - k \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

Como $j - i = (j - k) + (k - i)$, concluimos que:

$$\begin{aligned} j - i &\geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ &= n \end{aligned}$$



Juegos y ordenes lineales

Corolario

Si un orden lineal $\mathfrak{A}$ satisface $\alpha_{2^k}(a, b)$, entonces la distancia entre a y b es al menos 2^k .

Tenemos que:

- ▶ Con una fórmula con rango de cuantificación k podemos verificar si dos puntos están a distancia 2^k .
- ▶ $\mathfrak{A}$ tiene al menos $2^k + 1$ elementos.

Tenemos una primera indicación de que si queremos $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ deben tener un número exponencial de elementos.

- ▶ Hagamos más precisa esta afirmación ...

Juegos y ordenes lineales

Dado: $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, \dots, m\}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle B = \{1, \dots, n\}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$.

- Pregunta original: ¿Cuan grandes tienen que ser m y n para que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$?

Proposición

Si $m < n < 2^{k-1}$, entonces existe una oración φ tal que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$, $\mathfrak{B} \models \varphi$ y $rc(\varphi) \leq k$.

Demostración: Sea

$$\varphi = \exists x (\exists y \alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(y, x) \wedge \exists z \alpha_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}(x, z)).$$

Juegos y ordenes lineales

Se tiene que $\mathfrak{A} \not\models \varphi$ y $\mathfrak{B} \models \varphi$.

► ¿Por qué?

También se tiene que $rc(\varphi) = 2 + rc(\alpha_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(y, x)) = 2 + \lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil$.

Como $n < 2^{k-1}$, se tiene que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor < 2^{k-2}$, por lo que $\lceil \log \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rceil \leq k - 2$. Concluimos que $rc(\varphi) \leq k$. □

Conclusión

Si queremos que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces $|A|$ y $|B|$ deben ser $\Omega(2^k)$.

► Vamos a ver que esta es una buena estimación ...

Ordenes lineales indistinguibles

Dado: $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, \dots, m\}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle B = \{1, \dots, n\}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$.

Proposición

Si $m, n \geq 2^k + 1$, entonces $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$.

Demostración: Vamos a definir una estrategia ganadora para **D**.

Utilizamos una estrategia que en la ronda $\ell \leq k$ cumpla lo siguiente: Si las movidas en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $(a_1, \dots, a_\ell)$ y $(b_1, \dots, b_\ell)$, respectivamente, entonces para todo $1 \leq i, j \leq \ell$:

1a. si $|a_i - a_j| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| = |a_i - a_j|$;

1b. si $|a_i - 1| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - 1| = |a_i - 1|$;

1c. si $|a_i - m| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - n| = |a_i - m|$;

Ordenes lineales indistinguibles

2a. si $|a_i - a_j| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| \geq 2^{k-\ell}$;

2b. si $|a_i - 1| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - 1| \geq 2^{k-\ell}$;

2c. si $|a_i - m| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - n| \geq 2^{k-\ell}$;

3. $a_i < a_j$ si y sólo si $b_i < b_j$.

Cuando tomamos $\ell = k$, concluimos que gana **D**. ¿Por qué?

Vamos a demostrar por inducción en $\ell \leq k$ que **D** puede jugar de tal forma de cumplir las condiciones anteriores.

Ordenes lineales indistinguibles

Suponga que en la ronda $\ell < k$ las movidas en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $(a_1, \dots, a_\ell)$ y $(b_1, \dots, b_\ell)$, respectivamente.

Suponga que **S** decide jugar un punto $a_{\ell+1}$ en $\mathfrak{A}$ (si **S** juega un punto en $\mathfrak{B}$, la estrategia se define de la misma forma).

Tenemos tres casos posibles:

- ▶ Existe $i \in \{1, \dots, \ell\}$ tal que a_i es el menor elemento en $(a_1, \dots, a_\ell)$ y $1 \leq a_{\ell+1} \leq a_i$.
- ▶ Existe $i \in \{1, \dots, \ell\}$ tal que a_i es el mayor elemento en $(a_1, \dots, a_\ell)$ y $a_i \leq a_{\ell+1} \leq m$.
- ▶ Existen $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ tales que $a_i \leq a_j$, no existe un elemento entre ellos en $(a_1, \dots, a_\ell)$ y $a_i \leq a_{\ell+1} \leq a_j$.

Ordenes lineales indistinguibles

Vamos a ver como se define la estrategia en el tercer caso. Los otros dos casos son idénticos a este.

- ▶ Si $|a_i - a_j| < 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| = |a_i - a_j|$. Los intervalos $[a_i, a_j]$ en $\mathfrak{A}$ y $[b_i, b_j]$ en $\mathfrak{B}$ son isomorfos, por lo que es fácil definir $b_{\ell+1}$. ¿Cómo se define?
- ▶ Si $|a_i - a_j| \geq 2^{k-\ell}$, entonces $|b_i - b_j| \geq 2^{k-\ell}$. Para definir $b_{\ell+1}$ consideramos tres casos.
 - ▶ Si $|a_i - a_{\ell+1}| < 2^{k-(\ell+1)}$, entonces definimos $b_{\ell+1}$ como un punto en $\mathfrak{B}$ mayor o igual a b_i tal que $|a_i - a_{\ell+1}| = |b_i - b_{\ell+1}|$.
 - ▶ Si $|a_j - a_{\ell+1}| < 2^{k-(\ell+1)}$, entonces definimos $b_{\ell+1}$ como un punto en $\mathfrak{B}$ menor o igual a b_j tal que $|a_j - a_{\ell+1}| = |b_j - b_{\ell+1}|$.

Ordenes lineales indistinguibles

- ▶ Si $|a_i - a_{\ell+1}| \geq 2^{k-(\ell+1)}$ y $|a_j - a_{\ell+1}| \geq 2^{k-(\ell+1)}$, entonces definimos $b_{\ell+1}$ de la siguiente forma.

Sabemos que existe por lo menos un punto $b_i \leq b \leq b_j$ tal que $|b_i - b| \geq 2^{k-(\ell+1)}$ y $|b_j - b| \geq 2^{k-(\ell+1)}$. Definimos $b_{\ell+1}$ como uno de estos puntos.

Para terminar la demostración tenemos que demostrar que $(a_1, \dots, a_{\ell+1})$ y $(b_1, \dots, b_{\ell+1})$ satisfacen las condiciones iniciales.

- ▶ ¿Cómo se hace esto?



Paridad no es definible sobre ordenes lineales finitos

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$, $\mathcal{C}$ la clase de ordenes lineales finitos sobre $\mathcal{L}$ y

$$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \mathcal{C} \mid |A| \text{ es par, donde } A \text{ es el dominio de } \mathfrak{A}\}.$$

Corolario

$\mathcal{P}$ no es definible en lógica de primer orden en $\mathcal{C}$.

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

Volvemos a considerar vocabularios con constantes.

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

- ▶ Los dominios de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son A y B , respectivamente.

Decimos que $\mathfrak{B}$ es la sub-estructura de $\mathfrak{A}$ inducida por B si

- ▶ $B \subseteq A$
- ▶ para cada $c \in \mathcal{L}$, se tiene que $c^{\mathfrak{A}} \in B$ y $c^{\mathfrak{B}} = c^{\mathfrak{A}}$
- ▶ para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k : $R^{\mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{A}} \cap B^k$

Terminología: Isomorfismo incluyendo constantes

Decimos que f es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si:

- ▶ f es una biyección
- ▶ Para cada $c \in \mathcal{L}$, se tiene que $f(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}}$
- ▶ Para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k y $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$, se tiene que $(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}}$ si y sólo si $(f(a_1), \dots, f(a_k)) \in R^{\mathfrak{B}}$

Notación

$\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son estructuras isomorfas, denotado como $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, si existe un isomorfismo f de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

¡El juego no cambia!

Tablero	:	$\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$
Jugadores	:	Duplicator (D) y Spoiler (S)
Número de rondas	:	$k \geq 0$ (parámetro del juego)

En cada ronda:

1. **S** elige una estructura y un punto en esa estructura.
2. **D** responde con un punto en la otra estructura.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Caso general

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ que contiene constantes $\{c_1, \dots, c_\ell\}$.

Sean $(a_1, \dots, a_k)$ y $(b_1, \dots, b_k)$ los puntos jugados en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

- ▶ **S** gana el juego si

$$((c_1^{\mathfrak{A}}, \dots, c_\ell^{\mathfrak{A}}, a_1, \dots, a_k), (c_1^{\mathfrak{B}}, \dots, c_\ell^{\mathfrak{B}}, b_1, \dots, b_k))$$

no es un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

- ▶ En caso contrario gana **D**.

¿Por qué incluimos las constantes?

- ▶ Nótese que puede pasar que $\mathfrak{A} \not\equiv_0 \mathfrak{B}$. ¿Tiene sentido esto?

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Estrategia ganadora

Notación

D tiene una *estrategia ganadora* en el juego de Ehrenfeucht-Fraïssé de k rondas entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ si para cada posible forma de jugar de **S**, existe una forma de jugar de **D** que le permite ganar.

► $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Ejercicio

Sea $\mathcal{L} = \{<, \min, \max\}$ y $\mathcal{C}$ la clase de $\mathcal{L}$ -estructuras tales que $<$ es un orden lineal finito, $\min$ es el menor elemento de $<$ y $\max$ es el mayor elemento de $<$.

- Demuestre que para $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{C}$, si $|A|, |B| \geq 2^k + 1$, entonces $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$.

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$.

Notación

- ▶ $LPO[k]$ es el conjunto de $\mathcal{L}$ -oraciones en lógica de primer orden con rango de cuantificación a lo más k .
- ▶ Dos $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $LPO[k]$ si para cada $\varphi \in LPO[k]$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé

Teorema (Ehrenfeucht-Fraïssé)

Para todo par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$
2. $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $LPO[k]$

Ejercicio

Use el teorema para demostrar que la clausura transitiva no es definible en lógica de primer orden sobre la relación sucesor.

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: Demostración

Dado: $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A y tupla $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ de elementos de A .

Notación

- ▶ $\mathcal{L}_m$: Resultado de extender $\mathcal{L}$ con m constantes nuevas $c_1, \dots, c_m$
- ▶ $(\mathfrak{A}, \bar{a})$: $\mathcal{L}_m$ -estructura tal que
 - ▶ $c^{(\mathfrak{A}, \bar{a})} = c^{\mathfrak{A}}$ para cada constante $c \in \mathcal{L}$
 - ▶ $R^{(\mathfrak{A}, \bar{a})} = R^{\mathfrak{A}}$ para cada relación $R \in \mathcal{L}$
 - ▶ $c_i^{(\mathfrak{A}, \bar{a})} = a_i$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$

Para una tupla (a_1) , usamos la notación $(\mathfrak{A}, a_1)$ para $(\mathfrak{A}, (a_1))$

Tipo de una estructura

Una noción fundamental

Dadas variables $x_1, \dots, x_m$, el k -tipo de $(\mathfrak{A}, \bar{a})$ es definido como:

$$\text{tp}_k(\mathfrak{A}, \bar{a}) = \{ \varphi(x_1, \dots, x_m) \mid \text{rc}(\varphi(x_1, \dots, x_m)) \leq k \text{ y } \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_m) \}.$$

Vamos a estudiar algunas propiedades fundamentales de la noción de tipo.

Tipo de una estructura: Resultados fundamentales

Lema

Si $\mathcal{L}$ es finito, entonces $tp_k(\mathfrak{A}, \bar{a})$ contiene un número finito de fórmulas *hasta equivalencia lógica*.

Demostración: Suponga que $\mathcal{L} = \{c_1, \dots, c_r, R_1, \dots, R_s\}$, donde la aridad de R_i es n_i ($1 \leq i \leq s$).

Por inducción en k , vamos a demostrar que *hasta equivalencia lógica* hay un número finito de fórmulas φ tal que:

- ▶ $rc(\varphi) \leq k$
- ▶ las variables libre de φ están contenidas en $\{x_1, \dots, x_m\}$

De lo anterior se deduce el lema. ¿Por qué?

Tipo de una estructura: Resultados fundamentales

- Suponga que $k = 0$.

La siguiente es una cota superior para el número de fórmulas no equivalentes con rango de cuantificación 0 y cuyas variables libres están en el conjunto $\{x_1, \dots, x_m\}$:

$$2^2 \left[\left(\sum_{i=1}^s (r + m)^{n_i} \right) + (r + m)^2 \right]$$

¿Por qué?

Tipo de una estructura: Resultados fundamentales

- Suponga que la propiedad se cumple para k .

Sea φ una fórmula tal que $rc(\varphi) = k + 1$ y cuyas variables libres están contenidas en el conjunto $\{x_1, \dots, x_m\}$.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que φ es una combinación Booleana de fórmulas $\psi_1, \dots, \psi_n$, donde cada ψ_i satisface una de las siguientes condiciones:

1. $rc(\psi_i) \leq k$
2. $rc(\psi_i) = k + 1$ y $\psi_i = \exists x_{m+1} \alpha$, donde $rc(\alpha) = k$ y las variables libre de α están en el conjunto $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$
3. $rc(\psi_i) = k + 1$ y $\psi_i = \forall x_{m+1} \beta$, donde $rc(\beta) = k$ y las variables libre de β están en el conjunto $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$

Tipo de una estructura: Resultados fundamentales

Por hipótesis de inducción:

- ▶ existe un número finito de fórmulas con rango de cuantificación a los más k y cuyas variables libres están en el conjunto $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$

Concluimos que existe un número finito de fórmulas φ que satisfacen la condición en la transparencia anterior.

- ▶ Esto concluye la demostración del lema. ¿Por qué?



Tipo de una estructura: Resultados fundamentales

Sean $\mathfrak{A}$ una estructura sobre un vocabulario finito $\mathcal{L}$, y $\bar{a}$ una tupla con m elementos de $\mathfrak{A}$.

Corolario

Existe una fórmula $\varphi_{(\mathfrak{A}, \bar{a})}^k(x_1, \dots, x_m)$ tal que:

- ▶ $rc(\varphi_{(\mathfrak{A}, \bar{a})}^k(x_1, \dots, x_m)) = k$
- ▶ para cada $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{B}$ y tupla $\bar{b}$ con m elementos de $\mathfrak{B}$, se tiene que $\mathfrak{B} \models \varphi_{(\mathfrak{A}, \bar{a})}^k(\bar{b})$ si y sólo si $tp_k(\mathfrak{B}, \bar{b}) = tp_k(\mathfrak{A}, \bar{a})$

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: Demostración

Para demostrar el Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé usamos tipos y la relación $\simeq_k$ definida de la siguiente forma:

- ▶ $\mathfrak{A} \simeq_0 \mathfrak{B}$ si $\mathfrak{A} \equiv_0 \mathfrak{B}$
- ▶ $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$ si
 - forth** : Para cada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$
 - back** : Para cada $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$

Teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: Versión extendida

Teorema (Ehrenfeucht-Fraïssé)

Para todo par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$
2. $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $LPO[k]$
3. $\mathfrak{A} \simeq_k \mathfrak{B}$

Demostración: $(1 \Leftrightarrow 3)$: Por inducción en k . Para $k = 0$ se tiene por definición.

Demostración de la versión extendida

Suponga que la propiedad se cumple para k .

- Suponga que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \equiv_{k+1} \mathfrak{B}$.

Suponga que $\mathbf{S}$ decide jugar a_1 en $\mathfrak{A}$. Entonces como $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$, existe b_1 en $\mathfrak{B}$ tal que $(\mathfrak{A}, a_1) \simeq_k (\mathfrak{B}, b_1)$.

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a_1) \equiv_k (\mathfrak{B}, b_1)$.

Por lo tanto: Para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \equiv_k (\mathfrak{B}, b)$.

Demostración de la versión extendida

De la misma forma, pero ahora usando back, concluimos que para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \equiv_k (\mathfrak{B}, b)$.

De lo anterior: $\mathfrak{A} \equiv_{k+1} \mathfrak{B}$.

- Suponga ahora que $\mathfrak{A} \equiv_{k+1} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$.

Sea $a \in A$ y suponga que **S** decide jugar este punto. Como **D** tiene una estrategia ganadora en el juego de $k + 1$ rondas entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, existe b en $\mathfrak{B}$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \equiv_k (\mathfrak{B}, b)$.

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

Demostración de la versión extendida

Por lo tanto: Para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

De la misma forma, pero ahora dejando jugar a **S** en $\mathfrak{B}$, concluimos que para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

De lo anterior: $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$.

Demostración de la versión extendida

$(2 \Leftrightarrow 3)$: Por inducción en k .

Para $k = 0$ se tiene la equivalencia. ¿Por qué?

Suponga que la equivalencia se tiene para k .

- ▶ Suponga que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$. Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $\text{LPO}[k+1]$.
 - ▶ Para hacer esto nos basta con considerar el caso $\varphi = \exists x \psi(x)$ con $rc(\psi) = k$. ¿Por qué?

Si $\mathfrak{A} \models \exists x \psi(x)$, entonces existe $a \in A$ tal que $\mathfrak{A} \models \psi(a)$.

Como $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

Demostración de la versión extendida

Por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a)$ y $(\mathfrak{B}, b)$ están de acuerdo en $\text{LPO}[k]$.

Sea $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$. Como $(\mathfrak{A}, a) \models \psi(c)$, $rc(\psi(c)) = k$ y $(\mathfrak{A}, a)$, $(\mathfrak{B}, b)$ están de acuerdo en $\text{LPO}[k]$, se tiene que $(\mathfrak{B}, b) \models \psi(c)$.

Tenemos entonces que $\mathfrak{B} \models \psi(b)$, por lo que concluimos que $\mathfrak{B} \models \exists x \psi(x)$.

De la misma forma concluimos que si $\mathfrak{B} \models \exists x \psi(x)$, entonces $\mathfrak{A} \models \exists x \psi(x)$.

Demostración de la versión extendida

- Suponga que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $\text{LPO}[k + 1]$.
Tenemos que demostrar que $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$.

Sea $a \in A$. Como $\mathfrak{A} \models \varphi_{(\mathfrak{A}, a)}^k(a)$, sabemos que
 $\mathfrak{A} \models \exists x \varphi_{(\mathfrak{A}, a)}^k(x)$.

Puesto que $rc(\exists x \varphi_{(\mathfrak{A}, a)}^k(x)) = k + 1$, se tiene que
 $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi_{(\mathfrak{A}, a)}^k(x)$. Entonces, existe $b \in B$ tal que
 $\mathfrak{B} \models \varphi_{(\mathfrak{A}, a)}^k(b)$.

Demostración de la versión extendida

Por lo tanto: $\text{tp}_k(\mathfrak{A}, a) = \text{tp}_k(\mathfrak{B}, b)$, lo cual significa que $(\mathfrak{A}, a)$ y $(\mathfrak{B}, b)$ están de acuerdo en $\text{LPO}[k]$. Así, por hipótesis de inducción: $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

Entonces: Para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

De la misma forma concluimos que para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, a) \simeq_k (\mathfrak{B}, b)$.

De lo anterior: $\mathfrak{A} \simeq_{k+1} \mathfrak{B}$

□

Una estrategia completa

Corolario

Una propiedad $\mathcal{P}$ no es expresable en lógica de primer orden *si y sólo si* para cada $k \geq 0$, existen $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}_k$ y $\mathfrak{B}_k$ tales que:

- ▶ $\mathfrak{A}_k \in \mathcal{P}$
- ▶ $\mathfrak{B}_k \notin \mathcal{P}$
- ▶ $\mathfrak{A}_k \equiv_k \mathfrak{B}_k$

Ejercicio

Demuestre la dirección ($\Leftarrow$) del corolario.

Vamos a demostrar la dirección ($\Rightarrow$) del corolario.

Una estrategia completa: Demostración

Demostración ($\Rightarrow$): Consideramos el contra-positivo del enunciado.

Suponga que existe $k \geq 0$ tal que para todo par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, se tiene que:

► Si $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ si y sólo si $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}$

Vamos a demostrar que bajo esta hipótesis $\mathcal{P}$ es definible en lógica de primer orden.

Una estrategia completa: Demostración

Sea Ψ la siguiente oración:

$$\bigvee_{\mathfrak{A} \in \mathcal{P}} \varphi_{\mathfrak{A}}^k$$

Podemos suponer que Ψ es una fórmula en lógica de primer orden porque **hasta equivalencia lógica** sólo existe un número finito de oraciones con rango de cuantificación k .

Vamos a demostrar que para cada $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{B}$:

$$\mathfrak{B} \in \mathcal{P} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \Psi$$

Una estrategia completa: Demostración

($\Rightarrow$) Si $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}$, entonces $\mathfrak{B} \models \Psi$ ya que $\varphi_{\mathfrak{B}}^k$ es uno de los disyuntos de Ψ y $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{B}}^k$.

($\Leftarrow$) Suponga que $\mathfrak{B} \models \Psi$. Entonces existe $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}^k$.

Tenemos que $\text{tp}_k(\mathfrak{A}) = \text{tp}_k(\mathfrak{B})$, por lo que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $\text{LPO}[k]$.

Por teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Por hipótesis y dado que $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$, concluimos que $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}$

Una estrategia completa: Clases de estructuras

Sea $\mathcal{C}$ una clase de $\mathcal{L}$ -estructuras y $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$.

Corolario

$\mathcal{P}$ no es expresable en lógica de primer orden *en $\mathcal{C}$* si y sólo si para cada $k \geq 0$, existen $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k \in \mathcal{C}$ tales que:

- ▶ $\mathfrak{A}_k \in \mathcal{P}$
- ▶ $\mathfrak{B}_k \notin \mathcal{P}$
- ▶ $\mathfrak{A}_k \equiv_k \mathfrak{B}_k$

Vamos a demostrar la dirección ($\Rightarrow$) del corolario.

Una estrategia completa: Clases de estructuras

Demostración ($\Rightarrow$): Consideramos el contra-positivo del enunciado.

Suponga que existe $k \geq 0$ tal que **para todo par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{C}$** , se tiene que:

- ▶ Si $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ si y sólo si $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}$

Al igual que en el corolario anterior:

- ▶ Vamos a demostrar que bajo esta hipótesis $\mathcal{P}$ es definible en lógica de primer orden en $\mathcal{C}$.

Una estrategia completa: Clases de estructuras

Definimos Ψ como en la demostración anterior:

$$\bigvee_{\mathfrak{A} \in \mathcal{P}} \varphi_{\mathfrak{A}}^k$$

Vamos a demostrar que para cada $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$:

$$\mathfrak{B} \in \mathcal{P} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \Psi$$

($\Rightarrow$) Si $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}$, entonces $\mathfrak{B} \models \Psi$ ya que $\varphi_{\mathfrak{B}}^k$ es uno de los disyuntos de Ψ y $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{B}}^k$.

Una estrategia completa: Clases de estructuras

($\Leftarrow$) Suponga que $\mathfrak{B} \models \Psi$. Entonces existe $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ tal que $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{A}}^k$.

► En particular, se tiene que $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$.

Tenemos que $\text{tp}_k(\mathfrak{A}) = \text{tp}_k(\mathfrak{B})$, por lo que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ están de acuerdo en $\text{LPO}[k]$.

Por teorema de Ehrenfeucht-Fraïssé: $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Dado que $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{C}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ y $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$:

► Concluimos por hipótesis que $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}$

Una aplicación de los juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé: Decibilidad de una teoría

Para recordar ...

Un conjunto Σ de oraciones sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ es una teoría si:

- (1) Σ es satisfacible.
- (2) Σ es cerrado bajo consecuencia lógica: Si φ es una $\mathcal{L}$ -oración tal que $\Sigma \models \varphi$, entonces $\varphi \in \Sigma$.

Algunos ejemplos de teorías

Dado: Estructura $\mathfrak{A}$ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

Ejemplo clásico de teoría: La teoría de la estructura $\mathfrak{A}$

$$\text{Th}(\mathfrak{A}) = \{ \varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } \mathfrak{A} \models \varphi \}$$

Dos teorías fundamentales:

- ▶ Aritmética: $\text{Th}(\mathfrak{N})$
- ▶ Teoría de los números reales: $\text{Th}(\mathfrak{R})$

Algunos ejemplos de teorías

Dado: Conjunto consistente de oraciones Ax sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

Otro ejemplo clásico: La teoría del conjunto de axiomas Ax

$$\text{Th}(Ax) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } Ax \models \varphi\}$$

Un ejemplo de esto es la teoría de los ordenes lineales, la cual tiene los siguientes axiomas:

$$\forall x \neg(x < x)$$

$$\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$$

$$\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$$

Teorías completas

Para recordar ...

Una teoría Σ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ se dice completa si para cada $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\Sigma \models \varphi \quad \text{o} \quad \Sigma \models \neg\varphi$$

Ejemplo

$\text{Th}(\mathfrak{N})$ y $\text{Th}(\mathfrak{R})$ son teorías completas.

Caracterizando las teorías completas

También para recordar ...

Dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ son elementalmente equivalentes si para toda $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Teorema

Una teoría Σ es completa si y sólo si para cada par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ que satisfacen Σ , $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes.

Teorías finitamente axiomatizables

Sea Σ una teoría sobre un vocabulario $\mathcal{L}$.

Lo último para recordar ...

Σ es finitamente axiomatizable si existe un conjunto finito y consistente Ax de $\mathcal{L}$ -oraciones tal que $\Sigma = \text{Th}(Ax)$.

Teorema

Si una teoría es finitamente axiomatizable y completa, entonces es decidible.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorías finitamente axiomatizables y completas: Un ejemplo clásico

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y OrdDen el siguiente conjunto de axiomas:

$$\forall x \neg(x < x)$$

$$\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$$

$$\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$$

$$\forall x \exists y (x < y)$$

$$\forall x \exists y (y < x)$$

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$$

$\text{Th}(\text{OrdDen})$ es la teoría de los ordenes lineales densos sin primer ni último elemento.

- $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ son modelos de esta teoría.

Teorías finitamente axiomatizables y completas: Un ejemplo clásico

Teorema

$Th(OrdDen)$ es una teoría completa y finitamente axiomatizable.

Corolario

$Th(OrdDen)$ es una teoría decidible.

¿Cómo podemos demostrar que $Th(OrdDen)$ es una teoría completa?

- Los juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé vienen al rescate.

Th(OrdDen) es una teoría completa

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$, y suponga que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son $\mathcal{L}$ -estructuras tales que $\mathfrak{A} \models \text{OrdDen}$ y $\mathfrak{B} \models \text{OrdDen}$.

Tenemos que demostrar que para cada $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Para demostrar esto basta demostrar que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$ para todo $k \geq 0$

► ¿Por qué?

Ejercicio

Demuestre la condición anterior.

Comentarios finales

¡Tenemos una estrategia completa para el problema de definibilidad en lógica de primer orden!

- ▶ Puede ser utilizada incluso en clases de estructuras arbitrarias
- ▶ Pero algunas veces es difícil de aplicar

Vamos a estudiar entonces estrategias que no son completas, pero si fáciles de aplicar.

- ▶ Vamos a estudiar algunas nociones de **localidad**