

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé

IIC3263

Terminología

Restricción

Recuerde que en este curso consideramos vocabularios sin funciones.

De hecho, inicialmente nos vamos a restringir más.

- ▶ Para empezar vamos a considerar vocabularios sin constantes.

Importante

En este capítulo consideramos estructuras con dominios tanto finitos como infinitos.

- ▶ Resultados son válidos para estructuras arbitrarias.

Terminología: Sub-estructura inducida

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$.

- Los dominios de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son A y B , respectivamente.

Notación

Decimos que $\mathfrak{B}$ es la sub-estructura de $\mathfrak{A}$ *inducida* por B si $B \subseteq A$ y para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k :

$$R^{\mathfrak{B}} = R^{\mathfrak{A}} \cap B^k$$

Terminología: Isomorfismo

Notación

$f : A \rightarrow B$ es un isomorfismo de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si:

- ▶ f es una biyección.
- ▶ Para cada $R \in \mathcal{L}$ de aridad k y $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$, se tiene que:

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathfrak{A}} \quad \text{si y sólo si} \quad (f(a_1), \dots, f(a_k)) \in R^{\mathfrak{B}}$$

Notación

$\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son estructuras isomorfas, denotado como $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$, si existe un isomorfismo f de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

Terminología: Isomorfismo parcial

Dado: Tuplas $\bar{a} = (a_1, \dots, a_k)$ en $\mathfrak{A}$ y $\bar{b} = (b_1, \dots, b_k)$ en $\mathfrak{B}$.

Notación

$(\bar{a}, \bar{b})$ es un **isomorfismo parcial** de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$ si la función f definida como $f(a_j) = b_j$ es un isomorfismo entre las sub-estructuras de $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ inducidas por $\{a_1, \dots, a_k\}$ y $\{b_1, \dots, b_k\}$, respectivamente.

Ejercicio

Sea $\mathfrak{A} = \langle A = \{1, 2, 3, 4\}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$. ¿Es $((1,3), (2,5))$ un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$? ¿Y $((1,3), (4,2))$?

Terminología: Rango de cuantificación

Notación

El rango de cuantificación de una $\mathcal{L}$ -fórmula φ , denotado como $rc(\varphi)$, se define como:

- ▶ Si φ es atómica, entonces $rc(\varphi) = 0$.
- ▶ Si $\varphi = (\neg\psi)$, entonces $rc(\varphi) = rc(\psi)$.
- ▶ Si $\varphi = (\psi \star \theta)$, donde $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, entonces $rc(\varphi) = \max\{rc(\psi), rc(\theta)\}$.
- ▶ Si $\varphi = (\exists x \psi)$ ó $\varphi = (\forall x \psi)$, entonces $rc(\varphi) = 1 + rc(\psi)$.

Ejercicio

¿Cuáles son los rangos de cuantificación de $\exists x \forall y P(x, y)$ y $(\exists x P(x)) \wedge (\neg \exists y Q(y))$?

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé

Tablero	:	$\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$
Jugadores	:	Duplicator (D) y Spoiler (S)
Número de rondas	:	$k \geq 0$ (parámetro del juego)

En cada ronda:

1. **S** elige una estructura y un punto en esa estructura.
2. **D** responde con un punto en la otra estructura.

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé

Sean $\bar{a}$ y $\bar{b}$ los puntos jugados en $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$: **S** gana el juego si $(\bar{a}, \bar{b})$ no es un isomorfismo parcial de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{B}$.

► En caso contrario gana **D**.

¿Qué están tratando de hacer **S** y **D**?

Juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé

Para ganar, **D** tiene que mantener un isomorfismo parcial en todas las movidas.

- ▶ **D** no puede corregir en una movida posterior un error.

Notación

D tiene una *estrategia ganadora* en el juego de Ehrenfeucht-Fraïssé de k rondas entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ si para cada posible forma de jugar de **S**, existe una forma de jugar de **D** que le permite ganar.

- ▶ $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$

Un momento para jugar ...

Ejercicios

1. Sean $\mathfrak{A} = \langle \{1, 2, 3, 4\} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle \{1, 2, 3, 4, 5\} \rangle$. ¿Es cierto que $\mathfrak{A} \equiv_3 \mathfrak{B}$? ¿Qué sucede con $\mathfrak{A} \equiv_5 \mathfrak{B}$?
2. Sean $\mathfrak{A} = \langle \{1, 2, 3, 4\}, P^{\mathfrak{A}} = \{1, 2\} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle \{1, 2, 3, 4, 5\}, P^{\mathfrak{B}} = \{3, 5\} \rangle$. ¿Es cierto que $\mathfrak{A} \equiv_2 \mathfrak{B}$? ¿Qué sucede con $\mathfrak{A} \equiv_3 \mathfrak{B}$?
3. Sean $\mathfrak{A} = \langle \{1, 2, 3\}, R^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2), (2, 3)\} \rangle$ y $\mathfrak{B} = \langle \{1, 2, 3, 4\}, R^{\mathfrak{B}} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \rangle$. ¿Es cierto que $\mathfrak{A} \equiv_2 \mathfrak{B}$? ¿Qué sucede con $\mathfrak{A} \equiv_3 \mathfrak{B}$?
4. En el ejercicio anterior, suponga que A y B tienen k y $k + 1$ elementos, respectivamente. ¿Existe algún valor de k para el cual $\mathfrak{A} \equiv_3 \mathfrak{B}$?

Juegos y la lógica de primer orden

¿Por qué nos interesan los juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé?

- ▶ Si $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, entonces para cada oración φ tal que $rc(\varphi) \leq k$, se tiene que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

¿Por qué es esto cierto?

- ▶ Idea: Sea $\varphi = \forall x \exists y R(x, y)$, $\mathfrak{A} \models \varphi$ y $\mathfrak{B} \not\models \varphi$. Demuestre que $\mathfrak{A} \not\equiv_2 \mathfrak{B}$.

Vamos a demostrar que la relación descrita arriba es cierta.

- ▶ Pero antes vamos a ver cómo podemos usar este teorema.

Juegos y el poder expresivo de una lógica

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$ y propiedad $\mathcal{P}$ de las $\mathcal{L}$ -estructuras.

- Queremos demostrar que $\mathcal{P}$ no es expresable en lógica de primer orden.

Metodología:

1. Suponga que $\mathcal{P}$ si es expresable: Existe φ tal que para todo $\mathfrak{A} \in \text{ALLSTRUCT}[\mathcal{L}]$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.
2. Suponga que $rc(\varphi) = k$ y encuentre estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tales que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ pero $\mathfrak{B} \notin \mathcal{P}$.

Se puede concluir que φ no representa a $\mathcal{P}$. ¿Por qué?

Juegos y el poder expresivo de una lógica

Ejercicio

Sea $\mathcal{L} = \{U(\cdot)\}$ y $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las $\mathcal{L}$ -estructuras que tienen una cantidad par de elementos en U . Demuestre que $\mathcal{P}$ no es expresable en lógica de primer orden.

Queda mucho por recorrer ...

- ▶ ¿Qué tan buena es la metodología?
- ▶ ¿Qué tan cercanos son los juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé a la lógica de primer orden?

Poder expresivo de una lógica sobre una clase de estructuras

Dado: Clase $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$ -estructuras.

- ▶ Por ejemplo, $\mathcal{C}$ puede ser el conjunto de todas las $\mathcal{L}$ -estructuras finitas ($\text{STRUCT}[\mathcal{L}]$)

Notación

- ▶ $\mathcal{P}$ es una propiedad sobre $\mathcal{C}$ si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$.
- ▶ $\mathcal{P}$ es expresable en lógica de primer orden en $\mathcal{C}$ si existe una oración φ tal que para toda $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \in \mathcal{P}$$

¿Se puede usar la metodología para demostrar que una propiedad no es expresable en $\mathcal{C}$? ¿Cómo?

Poder expresivo de una lógica sobre una clase de estructuras

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$, clase $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$ -estructuras y propiedad $\mathcal{P}$ sobre $\mathcal{C}$.

- Queremos demostrar que $\mathcal{P}$ no es expresable en $\mathcal{C}$

Metodología:

1. Suponga que $\mathcal{P}$ si es expresable: Existe φ tal que para todo $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.
2. Suponga que $rc(\varphi) = k$ y encuentre estructuras $\mathfrak{A} \in \mathcal{C}$ y $\mathfrak{B} \in \mathcal{C}$ tales que $\mathfrak{A} \equiv_k \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}$ pero $\mathfrak{B} \notin \mathcal{P}$.

Se concluye que φ no representa a $\mathcal{P}$.