

# Lógicas con recursión

Dado: Vocabulario  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{L}$ -estructura  $\mathfrak{A}$  y símbolo de relación  $R$  con  $k$  argumentos

►  $R \notin \mathcal{L}$

## Notación

*Para  $X \subseteq A^k$ :  $(\mathfrak{A}, X)$  es una  $(\mathcal{L} \cup \{R\})$ -estructura donde  $R$  es interpretado como  $X$*

# Lógicas con recursión

## Definición

Sea  $\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$  una fórmula en LPO sobre  $\mathcal{L} \cup \{R\}$

- ▶  $T_\varphi : 2^{A^k} \rightarrow 2^{A^k}$  es un operador tal que para cada  $X \subseteq A^k$ :

$$T_\varphi(X) = \{(a_1, \dots, a_k) \in A^k \mid (\mathfrak{A}, X) \models \varphi(a_1, \dots, a_k, R)\}$$

- ▶  $X \subseteq A^k$  es un punto fijo de  $T_\varphi$  si  $T_\varphi(X) = X$

# Lógicas con recursión

## Definición

Sea  $\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$  una fórmula en LPO sobre  $\mathcal{L} \cup \{R\}$

- ▶  $T_\varphi : 2^{A^k} \rightarrow 2^{A^k}$  es un operador tal que para cada  $X \subseteq A^k$ :

$$T_\varphi(X) = \{(a_1, \dots, a_k) \in A^k \mid (\mathfrak{A}, X) \models \varphi(a_1, \dots, a_k, R)\}$$

- ▶  $X \subseteq A^k$  es un punto fijo de  $T_\varphi$  si  $T_\varphi(X) = X$

## Ejemplo

Muestre que  $T_\varphi$  no tiene punto fijo si  $\varphi(x, S) = \neg S(x)$

# Monotonía y la existencia de un punto fijo

## Definición

$T_\varphi$  es monótono si para  $X_1 \subseteq X_2$ :  $T_\varphi(X_1) \subseteq T_\varphi(X_2)$

# Monotonía y la existencia de un punto fijo

## Definición

$T_\varphi$  es monótono si para  $X_1 \subseteq X_2$ :  $T_\varphi(X_1) \subseteq T_\varphi(X_2)$

## Teorema (Tarski-Knaster)

Si  $T_\varphi$  es monótono, entonces tiene un menor punto fijo.

# Monotonía y la existencia de un punto fijo

## Definición

$T_\varphi$  es monótono si para  $X_1 \subseteq X_2$ :  $T_\varphi(X_1) \subseteq T_\varphi(X_2)$

## Teorema (Tarski-Knaster)

Si  $T_\varphi$  es monótono, entonces tiene un menor punto fijo.

**Demostración:** Defina  $T_0 = \emptyset$  y

$$T_{n+1} = T_\varphi(T_n)$$

Entonces:  $T_n \subseteq T_{n+1}$  puesto que  $T_\varphi$  es monótono

► Como  $A^k$  es finito: Existe  $\ell$  tal que  $T_\ell = T_{\ell+1} = T_\varphi(T_\ell)$

# Existencia de un punto fijo

Si  $Y$  es punto fijo, entonces  $T_\varphi(Y) = Y$

Como  $T_0 = \emptyset$ , se tiene que  $T_0 \subseteq Y$

# Existencia de un punto fijo

Si  $Y$  es punto fijo, entonces  $T_\varphi(Y) = Y$

Como  $T_0 = \emptyset$ , se tiene que  $T_0 \subseteq Y$

Como  $T_\varphi$  es monótono:

$$T_1 = T_\varphi(T_0) \subseteq T_\varphi(Y) = Y$$

# Existencia de un punto fijo

Si  $Y$  es punto fijo, entonces  $T_\varphi(Y) = Y$

Como  $T_0 = \emptyset$ , se tiene que  $T_0 \subseteq Y$

Como  $T_\varphi$  es monótono:

$$\begin{aligned} T_1 = T_\varphi(T_0) &\subseteq T_\varphi(Y) = Y \\ T_2 = T_\varphi(T_1) &\subseteq T_\varphi(Y) = Y \end{aligned}$$

# Existencia de un punto fijo

Si  $Y$  es punto fijo, entonces  $T_\varphi(Y) = Y$

Como  $T_0 = \emptyset$ , se tiene que  $T_0 \subseteq Y$

Como  $T_\varphi$  es monótono:

$$\begin{aligned} T_1 = T_\varphi(T_0) &\subseteq T_\varphi(Y) = Y \\ T_2 = T_\varphi(T_1) &\subseteq T_\varphi(Y) = Y \\ &\dots \\ T_{\ell-1} = T_\varphi(T_{\ell-2}) &\subseteq T_\varphi(Y) = Y \end{aligned}$$

# Existencia de un punto fijo

Si  $Y$  es punto fijo, entonces  $T_\varphi(Y) = Y$

Como  $T_0 = \emptyset$ , se tiene que  $T_0 \subseteq Y$

Como  $T_\varphi$  es monótono:

$$T_1 = T_\varphi(T_0) \subseteq T_\varphi(Y) = Y$$

$$T_2 = T_\varphi(T_1) \subseteq T_\varphi(Y) = Y$$

...

$$T_{\ell-1} = T_\varphi(T_{\ell-2}) \subseteq T_\varphi(Y) = Y$$

$$T_\ell = T_\varphi(T_{\ell-1}) \subseteq T_\varphi(Y) = Y$$

# Existencia de un punto fijo

Si  $Y$  es punto fijo, entonces  $T_\varphi(Y) = Y$

Como  $T_0 = \emptyset$ , se tiene que  $T_0 \subseteq Y$

Como  $T_\varphi$  es monótono:

$$T_1 = T_\varphi(T_0) \subseteq T_\varphi(Y) = Y$$

$$T_2 = T_\varphi(T_1) \subseteq T_\varphi(Y) = Y$$

...

$$T_{\ell-1} = T_\varphi(T_{\ell-2}) \subseteq T_\varphi(Y) = Y$$

$$T_\ell = T_\varphi(T_{\ell-1}) \subseteq T_\varphi(Y) = Y$$

Se tiene que  $T_\ell$  es el menor punto fijo de  $T_\varphi$



# Existencia de un punto fijo: Fórmulas positivas

Suponga que  $\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$  no utiliza conectivos  $\rightarrow$  y  $\leftrightarrow$

$\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$  es una fórmula positiva en  $R$  si cada aparición de  $R$  está bajo un número par de negaciones

- ▶  $\neg R(x)$  no es positiva en  $R$
- ▶  $\neg\neg R(x)$  y  $\neg(\neg R(x) \wedge T(x))$  son positivas en  $R$

# Existencia de un punto fijo: Fórmulas positivas

## Proposición

*Si  $\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$  es positiva, entonces  $T_\varphi$  es monótono*

# Existencia de un punto fijo: Fórmulas positivas

## Proposición

*Si  $\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$  es positiva, entonces  $T_\varphi$  es monótono*

## Ejercicio

Demuestre la proposición

- ¿Es la dirección contraria también válida?

# Existencia de un punto fijo: Fórmulas positivas

## Corolario

*Si  $\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$  es una fórmula positiva, entonces  $T_\varphi$  tiene un menor punto fijo.*

# Existencia de un punto fijo: Fórmulas positivas

## Corolario

*Si  $\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$  es una fórmula positiva, entonces  $T_\varphi$  tiene un menor punto fijo.*

## Notación

**Ifp**( $T_\varphi$ ) es el menor punto fijo de  $T_\varphi$

# Lógicas con operadores de punto fijo

La lógica de primer orden con operador de menor punto fijo extiende a la LPO.

# Lógicas con operadores de punto fijo

La lógica de primer orden con operador de menor punto fijo extiende a la LPO.

Incluimos una regla de la siguiente forma para definir esta lógica:

- Si  $R$  es un símbolo de predicado  $k$ -ario y  $\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$  es una fórmula positiva en LPO, entonces:

$$[\text{Ifp}_{(x_1, \dots, x_k), R} \varphi(x_1, \dots, x_k, R)](y_1, \dots, y_k)$$

es una fórmula en LPO con operador de menor punto fijo

# Lógicas con operadores de punto fijo

La semántica de  $[\mathbf{lfp}_{\bar{x}, R} \varphi(\bar{x}, R)](\bar{y})$  es definida como:

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{lfp}_{\bar{x}, R} \varphi(\bar{x}, R)](\bar{a}) \text{ si y sólo si } \bar{a} \in \mathbf{lfp}(T_\varphi)$$

# Lógicas con operadores de punto fijo

La semántica de  $[\mathbf{lfp}_{\bar{x}, R} \varphi(\bar{x}, R)](\bar{y})$  es definida como:

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{lfp}_{\bar{x}, R} \varphi(\bar{x}, R)](\bar{a}) \text{ si y sólo si } \bar{a} \in \mathbf{lfp}(T_\varphi)$$

## Ejercicio

Muestre que las siguientes propiedades pueden ser expresadas en la LPO con operador de menor punto fijo:

1. Determinar si un nodo es alcanzable desde otro en un grafo
2. Determinar si un grafo dirigido es acíclico
3. Determinar si un grafo es un árbol

# Primer ejemplo: Graph reachability

Sea  $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Vamos a definir una fórmula  $\varphi_{\text{gr}}(x, y)$  tal que:

- ▶  $\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{gr}}(a, b)$  si y sólo si  $b$  es alcanzable desde  $a$  en el grafo representado por  $\mathfrak{A}$

# Primer ejemplo: Graph reachability

Sea  $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Vamos a definir una fórmula  $\varphi_{\text{gr}}(x, y)$  tal que:

- $\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{gr}}(a, b)$  si y sólo si  $b$  es alcanzable desde  $a$  en el grafo representado por  $\mathfrak{A}$

$\varphi_{\text{gr}}(x, y)$  se define como:

$$\alpha(u, v, R) = E(u, v) \vee \exists w (E(u, w) \wedge R(w, v))$$

$$\varphi_{\text{gr}}(x, y) = [\text{Ifp}_{(u, v), R} \alpha(u, v, R)](x, y)$$

## Segundo ejemplo: Graph acyclicity

Vamos a definir una oración  $\Phi_{ga}$  tal que:

- ▶  $\mathfrak{A} \models \Phi_{ga}$  si y sólo si el grafo representado por  $\mathfrak{A}$  no contiene ciclos

## Segundo ejemplo: Graph acyclicity

Vamos a definir una oración  $\Phi_{ga}$  tal que:

- ▶  $\mathfrak{A} \models \Phi_{ga}$  si y sólo si el grafo representado por  $\mathfrak{A}$  no contiene ciclos

$\Phi_{ga}$  se define como:

$$\Phi_{ga} = \neg \exists x \varphi_{gr}(x, x)$$

## Tercer ejemplo: Grafos que representan árboles

Vamos a definir una fórmula  $\Psi_{\text{árbol}}$  tal que:

- ▶  $\mathfrak{A} \models \Psi_{\text{árbol}}$  si y sólo si el grafo representado por  $\mathfrak{A}$  es un árbol

# Tercer ejemplo: Grafos que representan árboles

Vamos a definir una fórmula  $\Psi_{\text{árbol}}$  tal que:

- ▶  $\mathfrak{A} \models \Psi_{\text{árbol}}$  si y sólo si el grafo representado por  $\mathfrak{A}$  es un árbol

Sean:

$$\begin{aligned}\beta(u, v) &= E(u, v) \vee E(v, u) \\ \gamma(u, v, R) &= \beta(u, v) \vee \exists w (\beta(u, w) \wedge R(w, v))\end{aligned}$$

# Tercer ejemplo: Grafos que representan árboles

Vamos a definir una fórmula  $\Psi_{\text{árbol}}$  tal que:

- ▶  $\mathfrak{A} \models \Psi_{\text{árbol}}$  si y sólo si el grafo representado por  $\mathfrak{A}$  es un árbol

Sean:

$$\begin{aligned}\beta(u, v) &= E(u, v) \vee E(v, u) \\ \gamma(u, v, R) &= \beta(u, v) \vee \exists w (\beta(u, w) \wedge R(w, v))\end{aligned}$$

$\Psi_{\text{árbol}}$  es definido como:

$$\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow \varphi_{\text{gr}}(x, y)) \wedge \neg \exists z [\text{Ifp}_{(u, v), R} \gamma(u, v, R)](z, z)$$

# Lógicas con operadores de punto fijo: Anidación

¿Pueden aparecer operadores de punto fijo anidados?

- ▶ Todavía no hemos dicho como hacer esto

Vamos a definir de manera precisa como anidar operadores.

- ▶ Vamos a definir la sintaxis de la lógica de primer orden con operador de menor punto fijo

# LPO con operador de menor punto fijo: Sintaxis

Dado: Vocabulario  $\mathcal{L}$

# LPO con operador de menor punto fijo: Sintaxis

Dado: Vocabulario  $\mathcal{L}$

## Definición

*LPO con operador de menor punto fijo extiende a LPO con la siguiente regla:*

- *Sea  $n \geq 1$ ,  $\{R_1, \dots, R_n\}$  un conjunto de símbolos de relación no mencionados en  $\mathcal{L}$ , y  $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \dots, R_n)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) una fórmula en LPO sobre  $(\mathcal{L} \cup \{R_1, \dots, R_n\})$  que es positiva en  $R_1, \dots, R_n$  y tal que el número de variables en  $\bar{x}_i$  es igual al número de argumentos en  $R_i$ .*

*Entonces para  $k \in \{1, \dots, n\}$ :*

$$[\text{Ifp}_{\bar{x}_k, R_k}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{y})$$

*es una fórmula en LPO con operador de menor punto fijo, suponiendo que  $\bar{x}_k$  e  $\bar{y}$  tienen el mismo número de variables.*

# LPO con operador de menor punto fijo: Semántica

Dado: Sistema de fórmulas  $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))$ , donde cada  $R_i$  tiene aridad  $k_i$

- Suponemos que cumple las condiciones de la definición

## Notación

- $(A_1, \dots, A_n) \subseteq (B_1, \dots, B_n)$  si  $A_i \subseteq B_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$
- Para  $(X_1, \dots, X_n) \subseteq (A^{k_1}, \dots, A^{k_n})$ :  $(\mathfrak{A}, X_1, \dots, X_n)$  es una  $(\mathcal{L} \cup \{R_1, \dots, R_n\})$ -estructura donde  $R_i$  es interpretado como  $X_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )

# LPO con operador de menor punto fijo: Semántica

$(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))$  define  $n$  operadores:

$$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^i : 2^{A^{k_1}} \times \dots \times 2^{A^{k_n}} \rightarrow 2^{A^{k_i}}$$

Para cada  $(X_1, \dots, X_n) \subseteq (A^{k_1}, \dots, A^{k_n})$ :

$$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^i(X_1, \dots, X_n) = \{(a_1, \dots, a_{k_i}) \in A^{k_i} \mid \\ (\mathfrak{A}, X_1, \dots, X_n) \models \varphi_i(a_1, \dots, a_{k_i}, R_1, \dots, R_n)\}$$

# LPO con operador de menor punto fijo: Semántica

## Notación

$$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}(X_1, \dots, X_n) = (T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^1(X_1, \dots, X_n), \dots, T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^n(X_1, \dots, X_n))$$

$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$  es un operador:

$$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} : 2^{A^{k_1}} \times \dots \times 2^{A^{k_n}} \rightarrow 2^{A^{k_1}} \times \dots \times 2^{A^{k_n}}$$

# LPO con operador de menor punto fijo: Semántica

Como en un sistema  $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))$  cada  $\varphi_i$  es positiva en  $R_1, \dots, R_n$ , cada  $T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^i$  es monótono.

Entonces:  $T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$  es monótono

- ▶ Tiene un menor punto fijo: **lfp**( $T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$ )

# LPO con operador de menor punto fijo: Semántica

Como en un sistema  $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))$  cada  $\varphi_i$  es positiva en  $R_1, \dots, R_n$ , cada  $T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^i$  es monótono.

Entonces:  $T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$  es monótono

- Tiene un menor punto fijo: **lfp**( $T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$ )

## Definición

$\mathfrak{A} \models [\mathbf{lfp}_{\bar{x}_i, R_i}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{a})$  si y sólo si  $\bar{a}$  pertenece a la *i-ésima componente* de **lfp**( $T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$ )

# LPO con operador de menor punto fijo: Complejidad

¿Qué tan cerca está LPO con operador de menor punto fijo de PTIME?

# LPO con operador de menor punto fijo: Complejidad

¿Qué tan cerca está LPO con operador de menor punto fijo de PTIME?

## Teorema

1. *Para cada vocabulario  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}$ -oración  $\varphi$  en LPO con operador de menor punto fijo se tiene que  $L_\varphi$  está en PTIME*
2. *Existe un vocabulario  $\mathcal{L}$  y una  $\mathcal{L}$ -oración  $\varphi$  en LPO con operador de menor punto fijo tal que  $L_\varphi$  es PTIME-completo*

# LPO con operador de menor punto fijo: Complejidad

¿Qué tan cerca está LPO con operador de menor punto fijo de PTIME?

## Teorema

1. *Para cada vocabulario  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}$ -oración  $\varphi$  en LPO con operador de menor punto fijo se tiene que  $L_\varphi$  está en PTIME*
2. *Existe un vocabulario  $\mathcal{L}$  y una  $\mathcal{L}$ -oración  $\varphi$  en LPO con operador de menor punto fijo tal que  $L_\varphi$  es PTIME-completo*

Vamos a demostrar la segunda parte del teorema.

- Dejamos la primera parte como ejercicio

# Un problema completo para PTIME: Cláusulas de Horn

## Notación

*$p$  es un literal positivo y  $\neg p$  es un literal negativo.*

## Notación

*Una cláusula  $C$  es de Horn si  $C$  contiene a lo más un literal positivo*

## Ejemplo

$$\begin{array}{l} p \vee \neg q \vee \neg r \\ \neg q \vee \neg r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \\ \neg q \end{array}$$

# Cláusulas de Horn: Conocimiento definitivo

Las cláusulas de Horn corresponden al siguiente tipo de reglas que expresan conocimiento definitivo:

- ▶  $q$
- ▶  $\neg q$
- ▶  $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$
- ▶  $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow \neg q$

# La complejidad de HORN-SAT y 3-HORN-SAT

Sean:

$\text{HORN-SAT} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una conjunción de cláusulas de Horn y } \varphi \text{ es satisfacible}\}$

$\text{3-HORN-SAT} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una conjunción de cláusulas de Horn, donde cada cláusula tiene a lo más 3 literales, y } \varphi \text{ es satisfacible}\}$

# La complejidad de HORN-SAT y 3-HORN-SAT

Sean:

$\text{HORN-SAT} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una conjunción de cláusulas de Horn y } \varphi \text{ es satisfacible}\}$

$\text{3-HORN-SAT} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una conjunción de cláusulas de Horn, donde cada clausula tiene a lo más 3 literales, y } \varphi \text{ es satisfacible}\}$

## Teorema

*HORN-SAT y 3-HORN-SAT son PTIME-completos*

# LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Vamos a definir un vocabulario  $\mathcal{L}$  y una  $\mathcal{L}$ -oración  $\Phi$  en LPO con operador de menor punto fijo tal que:

- ▶ 3-HORN-SAT puede ser reducido a  $L_\Phi$  en espacio logarítmico

# LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Vamos a definir un vocabulario  $\mathcal{L}$  y una  $\mathcal{L}$ -oración  $\Phi$  en LPO con operador de menor punto fijo tal que:

- ▶ 3-HORN-SAT puede ser reducido a  $L_\Phi$  en espacio logarítmico

Sea  $\mathcal{L} = \{P_1(\cdot), P_2(\cdot, \cdot), P_3(\cdot, \cdot, \cdot), N_1(\cdot), N_2(\cdot, \cdot), N_3(\cdot, \cdot, \cdot)\}$

# LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Vamos a definir un vocabulario  $\mathcal{L}$  y una  $\mathcal{L}$ -oración  $\Phi$  en LPO con operador de menor punto fijo tal que:

- ▶ 3-HORN-SAT puede ser reducido a  $L_\Phi$  en espacio logarítmico

Sea  $\mathcal{L} = \{P_1(\cdot), P_2(\cdot, \cdot), P_3(\cdot, \cdot, \cdot), N_1(\cdot), N_2(\cdot, \cdot), N_3(\cdot, \cdot, \cdot)\}$

Además, sean:

$$\begin{aligned}\alpha(u, P) = & P_1(u) \vee \exists v (P_2(u, v) \wedge P(v)) \vee \\ & \exists w_1 \exists w_2 (P_3(u, w_1, w_2) \wedge P(w_1) \wedge P(w_2))\end{aligned}$$

$$\varphi_{\text{pos}}(x) = [\text{Ifp}_{u,P} \alpha(u, P)](x)$$

# LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Entonces  $\Phi$  se define como:

$$\begin{aligned} & \neg \exists x (N_1(x) \wedge \varphi_{\text{pos}}(x)) \wedge \\ & \neg \exists x \exists y (N_2(x, y) \wedge \varphi_{\text{pos}}(x) \wedge \varphi_{\text{pos}}(y)) \wedge \\ & \neg \exists x \exists y \exists z (N_3(x, y, z) \wedge \varphi_{\text{pos}}(x) \wedge \varphi_{\text{pos}}(y) \wedge \varphi_{\text{pos}}(z)) \end{aligned}$$

# LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Entonces  $\Phi$  se define como:

$$\begin{aligned} & \neg \exists x (N_1(x) \wedge \varphi_{\text{pos}}(x)) \wedge \\ & \neg \exists x \exists y (N_2(x, y) \wedge \varphi_{\text{pos}}(x) \wedge \varphi_{\text{pos}}(y)) \wedge \\ & \neg \exists x \exists y \exists z (N_3(x, y, z) \wedge \varphi_{\text{pos}}(x) \wedge \varphi_{\text{pos}}(y) \wedge \varphi_{\text{pos}}(z)) \end{aligned}$$

Vamos a mostrar como reducir 3-HORN-SAT a  $L_\Phi$  en espacio logarítmico

# LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Sea  $\theta$  una conjunción de clausulas de Horn con a lo más 3 literales por clausula

- ▶ Suponga que  $\theta = \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_\ell$
- ▶ Suponga que  $p_1, \dots, p_n$  son las variables proposicionales mencionadas en  $\theta$

# LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Sea  $\theta$  una conjunción de clausulas de Horn con a lo más 3 literales por clausula

- ▶ Suponga que  $\theta = \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_\ell$
- ▶ Suponga que  $p_1, \dots, p_n$  son las variables proposicionales mencionadas en  $\theta$

Vamos a mostrar como construir una  $\mathcal{L}$ -estructura  $\mathfrak{A}_\theta$  tal que:

$$\theta \in 3\text{-HORN-SAT} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A}_\theta \in L_\Phi$$

# LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Dominio de  $\mathfrak{A}_\theta$  es  $A = \{p_1, \dots, p_n\}$

# LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Dominio de  $\mathfrak{A}_\theta$  es  $A = \{p_1, \dots, p_n\}$

$$P_1^{\mathfrak{A}_\theta} = \{p \in A \mid \text{existe } i \in \{1, \dots, \ell\} : \theta_i = p\}$$

$$P_2^{\mathfrak{A}_\theta} = \{(p, q) \in A^2 \mid \text{existe } i \in \{1, \dots, \ell\} : \theta_i = (p \vee \neg q)\}$$

$$P_3^{\mathfrak{A}_\theta} = \{(p, q, r) \in A^3 \mid \text{existe } i \in \{1, \dots, \ell\} : \theta_i = (p \vee \neg q \vee \neg r)\}$$

$$N_1^{\mathfrak{A}_\theta} = \{p \in A \mid \text{existe } i \in \{1, \dots, \ell\} : \theta_i = (\neg p)\}$$

$$N_2^{\mathfrak{A}_\theta} = \{(p, q) \in A^2 \mid \text{existe } i \in \{1, \dots, \ell\} : \theta_i = (\neg p \vee \neg q)\}$$

$$N_3^{\mathfrak{A}_\theta} = \{(p, q, r) \in A^3 \mid \text{existe } i \in \{1, \dots, \ell\} : \theta_i = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)\}$$

# LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Tenemos que demostrar que  $\theta$  es satisfacible si y sólo si  $\mathfrak{A}_\theta \models \Phi$

- ▶ ¿Cómo se demuestra esto?

Además, tenemos que demostrar que la reducción se puede calcular en espacio logarítmico

- ▶ ¿Cómo se demuestra esto?

# LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Tenemos que demostrar que  $\theta$  es satisfacible si y sólo si  $\mathfrak{A}_\theta \models \Phi$

- ▶ ¿Cómo se demuestra esto?

Además, tenemos que demostrar que la reducción se puede calcular en espacio logarítmico

- ▶ ¿Cómo se demuestra esto?

Concluimos que 3-HORN-SAT se puede reducir a  $L_\Phi$  en espacio logarítmico

- ▶ Por lo tanto:  $L_\Phi$  es PTIME-hard



# Fórmulas no positivas

¿Qué sucede si ya no pedimos a las fórmulas ser positivas?

# Fórmulas no positivas

¿Qué sucede si ya no pedimos a las fórmulas ser positivas?

- ▶ Definimos una nueva lógica (sobre un vocabulario  $\mathcal{L}$ )

# Fórmulas no positivas

¿Qué sucede si ya no pedimos a las fórmulas ser positivas?

- Definimos una nueva lógica (sobre un vocabulario  $\mathcal{L}$ )

## Definición

*LPO con operador parcial de punto fijo extiende a LPO con la siguiente regla:*

- *Sea  $n \geq 1$ ,  $\{R_1, \dots, R_n\}$  un conjunto de símbolos de relación no mencionados en  $\mathcal{L}$ , y  $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \dots, R_n)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) una fórmula en LPO sobre  $(\mathcal{L} \cup \{R_1, \dots, R_n\})$  tal que el número de variables en  $\bar{x}_i$  es igual al número de argumentos en  $R_i$ .*

*Entonces para  $k \in \{1, \dots, n\}$ :*

$$[\mathbf{pfp}_{\bar{x}_k, R_k}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{y})$$

*es una fórmula en LPO con operador parcial de punto fijo, suponiendo que  $\bar{x}_k$  e  $\bar{y}$  tienen el mismo número de variables.*

# LPO con operador parcial de punto fijo

Dado: Sistema de fórmulas  $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))$ , donde cada  $R_i$  tiene aridad  $k_i$

Al igual que para el caso de LPO con operador de menor punto fijo:

$$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^i(X_1, \dots, X_n) = \{(a_1, \dots, a_{k_i}) \in A^{k_i} \mid (\mathfrak{A}, X_1, \dots, X_n) \models \varphi_i(a_1, \dots, a_{k_i}, R_1, \dots, R_n)\}$$

# LPO con operador parcial de punto fijo

Dado: Sistema de fórmulas  $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))$ , donde cada  $R_i$  tiene aridad  $k_i$

Al igual que para el caso de LPO con operador de menor punto fijo:

$$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^i(X_1, \dots, X_n) = \{(a_1, \dots, a_{k_i}) \in A^{k_i} \mid (\mathfrak{A}, X_1, \dots, X_n) \models \varphi_i(a_1, \dots, a_{k_i}, R_1, \dots, R_n)\}$$

## Notación

$$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}(X_1, \dots, X_n) = (T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^1(X_1, \dots, X_n), \dots, T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^n(X_1, \dots, X_n))$$

# LPO con operador parcial de punto fijo

En el sistema  $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))$  ya **no** pedimos a cada  $\varphi_i$  ser positiva

- ▶  $T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$  puede no tener punto fijo

# LPO con operador parcial de punto fijo

En el sistema  $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))$  ya **no** pedimos a cada  $\varphi_i$  ser positiva

- ▶  $T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$  puede no tener punto fijo

Sea  $\overline{T}_0 = (\emptyset, \dots, \emptyset)$  y  $\overline{T}_{n+1} = T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}(\overline{T}_n)$

# LPO con operador parcial de punto fijo

En el sistema  $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))$  ya **no** pedimos a cada  $\varphi_i$  ser positiva

- ▶  $T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$  puede no tener punto fijo

Sea  $\overline{T}_0 = (\emptyset, \dots, \emptyset)$  y  $\overline{T}_{n+1} = T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}(\overline{T}_n)$

## Definición

$$\mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}) = \begin{cases} \overline{T}_k & \overline{T}_k = \overline{T}_{k+1} \\ \emptyset & \overline{T}_k \neq \overline{T}_{k+1} \text{ para todo } k \geq 0 \end{cases}$$

# LPO con operador parcial de punto fijo: Semántica

Para definir la semántica de la LPO con operador parcial de punto fijo sólo tenemos que reemplazar **lfp** por **pfp**:

# LPO con operador parcial de punto fijo: Semántica

Para definir la semántica de la LPO con operador parcial de punto fijo sólo tenemos que reemplazar **lfp** por **pfp**:

## Definición

$\mathcal{A} \models [\mathbf{pfp}_{\bar{x}_i, R_i} (\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{a})$  si y sólo si  $\bar{a}$  pertenece a la  $i$ -ésima componente de  $\mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)})$

# LPO con operador parcial de punto fijo: Semántica

Para definir la semántica de la LPO con operador parcial de punto fijo sólo tenemos que reemplazar **lfp** por **pfp**:

## Definición

$\mathcal{A} \models [\mathbf{pfp}_{\bar{x}_i, R_i} (\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{a})$  si y sólo si  $\bar{a}$  pertenece a la  $i$ -ésima componente de  $\mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)})$

Hay varias preguntas por responder:

# LPO con operador parcial de punto fijo: Semántica

Para definir la semántica de la LPO con operador parcial de punto fijo sólo tenemos que reemplazar **lfp** por **pfp**:

## Definición

$\mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{\bar{x}_i, R_i} (\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{a})$  si y sólo si  $\bar{a}$  pertenece a la  $i$ -ésima componente de  $\mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)})$

Hay varias preguntas por responder:

- ¿Está bien definido **pfp**? ¿Es  $\mathbf{lfp}(T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}) = \mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)})$  si cada fórmula  $\varphi_i$  es positiva?

# LPO con operador parcial de punto fijo: Semántica

Para definir la semántica de la LPO con operador parcial de punto fijo sólo tenemos que reemplazar **lfp** por **pfp**:

## Definición

$\mathcal{A} \models [\mathbf{pfp}_{\bar{x}_i, R_i} (\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{a})$  si y sólo si  $\bar{a}$  pertenece a la  $i$ -ésima componente de  $\mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)})$

Hay varias preguntas por responder:

- ▶ ¿Está bien definido **pfp**? ¿Es  $\mathbf{lfp}(T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}) = \mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)})$  si cada fórmula  $\varphi_i$  es positiva?
- ▶ ¿Es esta nueva lógica más expresiva que la LPO con operador de menor punto fijo?
  - ▶ ¿Podemos expresar propiedades difíciles de verificar?

# LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

Sea  $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot), L(\cdot, \cdot)\}$  y

$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}}, L^{\mathfrak{A}} \rangle, \text{ el grafo } (A, E^{\mathfrak{A}}) \text{ es no dirigido y 3-coloreable, y } L^{\mathfrak{A}} \text{ es un orden lineal en } A\}$

¿Cuál es la complejidad de  $\mathcal{P}$ ?

# LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

Sea  $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot), L(\cdot, \cdot)\}$  y

$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}}, L^{\mathfrak{A}} \rangle, \text{ el grafo } (A, E^{\mathfrak{A}}) \text{ es no dirigido y 3-coloreable, y } L^{\mathfrak{A}} \text{ es un orden lineal en } A\}$

¿Cuál es la complejidad de  $\mathcal{P}$ ?

Proposición

$\mathcal{P}$  es *NP-completo*

# LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

## Proposición

$\mathcal{P}$  es expresable en LPO con operador parcial de punto fijo

**Demostración:** Queremos encontrar una fórmula  $\varphi$  en LPO con operador parcial de punto fijo tal que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \in \mathcal{P}$$

# LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

Definimos  $\varphi$  como  $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$

$\psi_1$  indica que el grafo es no dirigido:

$$\forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow E(y, x))$$

$\psi_2$  indica que  $L$  es un orden lineal:

$$\begin{aligned} \forall x (\neg L(x, x)) \wedge \forall x \forall y (x = y \vee L(x, y) \vee L(y, x)) \wedge \\ \forall x \forall y \forall z (L(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow L(x, z)). \end{aligned}$$

# LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

Para definir  $\psi_3$  usamos la siguiente fórmula:

$$mc(u, v) = (B(u) \wedge B(v)) \vee (A(u) \wedge A(v)) \vee (R(u) \wedge R(v))$$

Entonces  $\psi_3$  es definida como:

$$\exists u [\mathbf{pfp}_{x,B} (\theta_1(x, B, A, R), \theta_2(y, B, A, R), \theta_3(z, B, A, R))](u)$$

# LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

$\theta_1(x, B, A, R)$  es definida como:

$$\begin{aligned} & \left( \forall u (\neg B(u) \wedge \neg A(u) \wedge \neg R(u)) \right) \vee \\ & \quad \left( \neg \exists u \exists v (E(u, v) \wedge mc(u, v)) \wedge B(x) \right) \vee \\ & \quad \left( \exists u \exists v (E(u, v) \wedge mc(u, v)) \wedge \right. \\ & \quad \left. \exists w (\neg R(w) \wedge \forall u (L(u, w) \rightarrow R(u)) \wedge (L(x, w) \vee (L(w, x) \wedge B(x)))) \right) \end{aligned}$$

# LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

$\theta_2(y, B, A, R)$  es definida como:

$$\begin{aligned} & \exists u (B(u) \vee A(u) \vee R(u)) \wedge \\ & \left[ \left( \neg \exists u \exists v (E(u, v) \wedge mc(u, v)) \wedge A(y) \right) \vee \right. \\ & \quad \left( \exists u \exists v (E(u, v) \wedge mc(u, v)) \wedge \right. \\ & \quad \left. \exists w (\neg R(w) \wedge \forall u (L(u, w) \rightarrow R(u)) \wedge \right. \\ & \quad \left. \left. ((B(w) \wedge w = y) \vee (L(w, y) \wedge A(y))) \right) \right] \end{aligned}$$

# LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

$\theta_3(z, B, A, R)$  es definida como:

$$\begin{aligned} & \exists u (B(u) \vee A(u) \vee R(u)) \wedge \\ & \left[ \left( \neg \exists u \exists v (E(u, v) \wedge mc(u, v)) \wedge R(z) \right) \vee \right. \\ & \quad \left( \exists u \exists v (E(u, v) \wedge mc(u, v)) \wedge \right. \\ & \quad \exists w (\neg R(w) \wedge \forall u (L(u, w) \rightarrow R(u)) \wedge \\ & \quad \left. \left. ((A(w) \wedge w = z) \vee (L(w, z) \wedge R(z))) \right) \right]. \end{aligned}$$

□

# LPO con operador parcial de punto fijo: Complejidad

## Teorema

1. *Para cada vocabulario  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}$ -oración  $\varphi$  en LPO con operador parcial de punto fijo se tiene que  $L_\varphi$  está en PSPACE*
2. *Existe un vocabulario  $\mathcal{L}$  y una  $\mathcal{L}$ -oración  $\varphi$  en LPO con operador parcial de punto fijo tal que  $L_\varphi$  es PSPACE-completo*

# LPO con operador parcial de punto fijo: Complejidad

## Teorema

1. *Para cada vocabulario  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}$ -oración  $\varphi$  en LPO con operador parcial de punto fijo se tiene que  $L_\varphi$  está en PSPACE*
2. *Existe un vocabulario  $\mathcal{L}$  y una  $\mathcal{L}$ -oración  $\varphi$  en LPO con operador parcial de punto fijo tal que  $L_\varphi$  es PSPACE-completo*

## Ejercicio

Demuestre la primera parte del teorema

# Comentarios finales

Hemos visto varias lógicas.

- ▶ La complejidad de los datos para estas lógicas son distintas

# Comentarios finales

Hemos visto varias lógicas.

- ▶ La complejidad de los datos para estas lógicas son distintas

¿Pueden *expresar* clases de complejidad estas lógicas?

# Comentarios finales

Hemos visto varias lógicas.

- ▶ La complejidad de los datos para estas lógicas son distintas

¿Pueden *expresar* clases de complejidad estas lógicas?

- ▶ ¿Es cierto que toda propiedad en PTIME puede ser *expresada* en LPO con operador de menor punto fijo?

# Comentarios finales

Hemos visto varias lógicas.

- ▶ La complejidad de los datos para estas lógicas son distintas

¿Pueden *expresar* clases de complejidad estas lógicas?

- ▶ ¿Es cierto que toda propiedad en PTIME puede ser *expresada* en LPO con operador de menor punto fijo?
- ▶ ¿Qué sucede con el caso de NP y  $\exists$ LSO? ¿Y con PSPACE y LPO con operador parcial de punto fijo?

# Comentarios finales

Hemos visto varias lógicas.

- ▶ La complejidad de los datos para estas lógicas son distintas

¿Pueden *expresar* clases de complejidad estas lógicas?

- ▶ ¿Es cierto que toda propiedad en PTIME puede ser *expresada* en LPO con operador de menor punto fijo?
- ▶ ¿Qué sucede con el caso de NP y  $\exists$ LSO? ¿Y con PSPACE y LPO con operador parcial de punto fijo?

Llamamos a esto **complejidad descriptiva**.

- ▶ Este es el siguiente capítulo a estudiar ...