

Lógicas con recursión

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ y símbolo de relación R con k argumentos

► $R \notin \mathcal{L}$

Notación

Para $X \subseteq A^k$: $(\mathfrak{A}, X)$ es una $(\mathcal{L} \cup \{R\})$ -estructura donde R es interpretado como X

Lógicas con recursión

Definición

Sea $\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$ una fórmula en LPO sobre $\mathcal{L} \cup \{R\}$

- ▶ $T_\varphi : 2^{A^k} \rightarrow 2^{A^k}$ es un operador tal que para cada $X \subseteq A^k$:

$$T_\varphi(X) = \{(a_1, \dots, a_k) \in A^k \mid (\mathfrak{A}, X) \models \varphi(a_1, \dots, a_k, R)\}$$

- ▶ $X \subseteq A^k$ es un punto fijo de T_φ si $T_\varphi(X) = X$

Ejemplo

Muestre que T_φ no tiene punto fijo si $\varphi(x, S) = \neg S(x)$

Monotonía y la existencia de un punto fijo

Definición

T_φ es monótono si para $X_1 \subseteq X_2$: $T_\varphi(X_1) \subseteq T_\varphi(X_2)$

Teorema (Tarski-Knaster)

Si T_φ es monótono, entonces tiene un menor punto fijo.

Demostración: Defina $T_0 = \emptyset$ y

$$T_{n+1} = T_\varphi(T_n)$$

Entonces: $T_n \subseteq T_{n+1}$ puesto que T_φ es monótono

- Como A^k es finito: Existe ℓ tal que $T_\ell = T_{\ell+1} = T_\varphi(T_\ell)$

Existencia de un punto fijo

Si Y es punto fijo, entonces $T_\varphi(Y) = Y$

Como $T_0 = \emptyset$, se tiene que $T_0 \subseteq Y$

Como T_φ es monótono:

$$\begin{aligned} T_1 = T_\varphi(T_0) &\subseteq T_\varphi(Y) = Y \\ T_2 = T_\varphi(T_1) &\subseteq T_\varphi(Y) = Y \\ &\dots \\ T_{\ell-1} = T_\varphi(T_{\ell-2}) &\subseteq T_\varphi(Y) = Y \\ T_\ell = T_\varphi(T_{\ell-1}) &\subseteq T_\varphi(Y) = Y \end{aligned}$$

Se tiene que T_ℓ es el menor punto fijo de T_φ

□

Existencia de un punto fijo: Fórmulas positivas

Suponga que $\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$ no utiliza conectivos $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$

$\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$ es una fórmula positiva en R si cada aparición de R está bajo un número par de negaciones

- ▶ $\neg R(x)$ no es positiva en R
- ▶ $\neg\neg R(x)$ y $\neg(\neg R(x) \wedge T(x))$ son positivas en R

Existencia de un punto fijo: Fórmulas positivas

Proposición

Si $\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$ es positiva, entonces T_φ es monótono

Ejercicio

Demuestre la proposición

- ¿Es la dirección contraria también válida?

Existencia de un punto fijo: Fórmulas positivas

Corolario

Si $\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$ es una fórmula positiva, entonces T_φ tiene un menor punto fijo.

Notación

Ifp(T_φ) es el menor punto fijo de T_φ

Lógicas con operadores de punto fijo

La lógica de primer orden con operador de menor punto fijo extiende a la LPO.

Incluimos una regla de la siguiente forma para definir esta lógica:

- Si R es un símbolo de predicado k -ario y $\varphi(x_1, \dots, x_k, R)$ es una fórmula positiva en LPO, entonces:

$$[\text{Ifp}_{(x_1, \dots, x_k), R} \varphi(x_1, \dots, x_k, R)](y_1, \dots, y_k)$$

es una fórmula en LPO con operador de menor punto fijo

Lógicas con operadores de punto fijo

La semántica de $[\mathbf{lfp}_{\bar{x}, R} \varphi(\bar{x}, R)](\bar{y})$ es definida como:

$$\mathfrak{A} \models [\mathbf{lfp}_{\bar{x}, R} \varphi(\bar{x}, R)](\bar{a}) \text{ si y sólo si } \bar{a} \in \mathbf{lfp}(T_\varphi)$$

Ejercicio

Muestre que las siguientes propiedades pueden ser expresadas en la LPO con operador de menor punto fijo:

1. Determinar si un nodo es alcanzable desde otro en un grafo
2. Determinar si un grafo dirigido es acíclico
3. Determinar si un grafo es un árbol

Primer ejemplo: Graph reachability

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$

Vamos a definir una fórmula $\varphi_{\text{gr}}(x, y)$ tal que:

- $\mathfrak{A} \models \varphi_{\text{gr}}(a, b)$ si y sólo si b es alcanzable desde a en el grafo representado por $\mathfrak{A}$

$\varphi_{\text{gr}}(x, y)$ se define como:

$$\begin{aligned}\alpha(u, v, R) &= E(u, v) \vee \exists w (E(u, w) \wedge R(w, v)) \\ \varphi_{\text{gr}}(x, y) &= [\text{Ifp}_{(u,v), R} \alpha(u, v, R)](x, y)\end{aligned}$$

Segundo ejemplo: Graph acyclicity

Vamos a definir una oración Φ_{ga} tal que:

- ▶ $\mathfrak{A} \models \Phi_{ga}$ si y sólo si el grafo representado por $\mathfrak{A}$ no contiene ciclos

Φ_{ga} se define como:

$$\Phi_{ga} = \neg \exists x \varphi_{gr}(x, x)$$

Tercer ejemplo: Grafos que representan árboles

Vamos a definir una fórmula $\Psi_{\text{árbol}}$ tal que:

- $\mathfrak{A} \models \Psi_{\text{árbol}}$ si y sólo si el grafo representado por $\mathfrak{A}$ es un árbol

Sean:

$$\begin{aligned}\beta(u, v) &= E(u, v) \vee E(v, u) \\ \gamma(u, v, R) &= \beta(u, v) \vee \exists w (\beta(u, w) \wedge R(w, v))\end{aligned}$$

$\Psi_{\text{árbol}}$ es definido como:

$$\exists x \forall y (x \neq y \rightarrow \varphi_{\text{gr}}(x, y)) \wedge \neg \exists z [\text{Ifp}_{(u, v), R} \gamma(u, v, R)](z, z)$$

Lógicas con operadores de punto fijo: Anidación

¿Pueden aparecer operadores de punto fijo anidados?

- ▶ Todavía no hemos dicho como hacer esto

Vamos a definir de manera precisa como anidar operadores.

- ▶ Vamos a definir la sintaxis de la lógica de primer orden con operador de menor punto fijo

LPO con operador de menor punto fijo: Sintaxis

Dado: Vocabulario $\mathcal{L}$

Definición

LPO con operador de menor punto fijo extiende a LPO con la siguiente regla:

- *Sea $n \geq 1$, $\{R_1, \dots, R_n\}$ un conjunto de símbolos de relación no mencionados en $\mathcal{L}$, y $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \dots, R_n)$ ($1 \leq i \leq n$) una fórmula en LPO sobre $(\mathcal{L} \cup \{R_1, \dots, R_n\})$ que es positiva en $R_1, \dots, R_n$ y tal que el número de variables en $\bar{x}_i$ es igual al número de argumentos en R_i .*

Entonces para $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$[\text{Ifp}_{\bar{x}_k, R_k}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{y})$$

es una fórmula en LPO con operador de menor punto fijo, suponiendo que $\bar{x}_k$ e $\bar{y}$ tienen el mismo número de variables.

LPO con operador de menor punto fijo: Semántica

Dado: Sistema de fórmulas $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))$, donde cada R_i tiene aridad k_i

- Suponemos que cumple las condiciones de la definición

Notación

- $(A_1, \dots, A_n) \subseteq (B_1, \dots, B_n)$ si $A_i \subseteq B_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$
- Para $(X_1, \dots, X_n) \subseteq (A^{k_1}, \dots, A^{k_n})$: $(\mathfrak{A}, X_1, \dots, X_n)$ es una $(\mathcal{L} \cup \{R_1, \dots, R_n\})$ -estructura donde R_i es interpretado como X_i ($1 \leq i \leq n$)

LPO con operador de menor punto fijo: Semántica

$(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))$ define n operadores:

$$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^i : 2^{A^{k_1}} \times \dots \times 2^{A^{k_n}} \rightarrow 2^{A^{k_i}}$$

Para cada $(X_1, \dots, X_n) \subseteq (A^{k_1}, \dots, A^{k_n})$:

$$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^i(X_1, \dots, X_n) = \{(a_1, \dots, a_{k_i}) \in A^{k_i} \mid \\ (\mathfrak{A}, X_1, \dots, X_n) \models \varphi_i(a_1, \dots, a_{k_i}, R_1, \dots, R_n)\}$$

LPO con operador de menor punto fijo: Semántica

Notación

$$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}(X_1, \dots, X_n) = (T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^1(X_1, \dots, X_n), \dots, T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^n(X_1, \dots, X_n))$$

$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$ es un operador:

$$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)} : 2^{A^{k_1}} \times \dots \times 2^{A^{k_n}} \rightarrow 2^{A^{k_1}} \times \dots \times 2^{A^{k_n}}$$

LPO con operador de menor punto fijo: Semántica

Como en un sistema $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))$ cada φ_i es positiva en $R_1, \dots, R_n$, cada $T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^i$ es monótono.

Entonces: $T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$ es monótono

- Tiene un menor punto fijo: **lfp**($T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$)

Definición

$\mathfrak{A} \models [\mathbf{lfp}_{\bar{x}_i, R_i}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{a})$ si y sólo si $\bar{a}$ pertenece a la *i-ésima componente* de **lfp**($T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$)

LPO con operador de menor punto fijo: Complejidad

¿Qué tan cerca está LPO con operador de menor punto fijo de PTIME?

Teorema

1. *Para cada vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ -oración φ en LPO con operador de menor punto fijo se tiene que L_φ está en PTIME*
2. *Existe un vocabulario $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$ -oración φ en LPO con operador de menor punto fijo tal que L_φ es PTIME-completo*

Vamos a demostrar la segunda parte del teorema.

- Dejamos la primera parte como ejercicio

Un problema completo para PTIME: Cláusulas de Horn

Notación

p es un literal positivo y $\neg p$ es un literal negativo.

Notación

Una cláusula C es de Horn si C contiene a lo más un literal positivo

Ejemplo

$$\begin{array}{l} p \vee \neg q \vee \neg r \\ \neg q \vee \neg r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \\ \neg q \end{array}$$

Cláusulas de Horn: Conocimiento definitivo

Las cláusulas de Horn corresponden al siguiente tipo de reglas que expresan conocimiento definitivo:

- ▶ q
- ▶ $\neg q$
- ▶ $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$
- ▶ $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow \neg q$

La complejidad de HORN-SAT y 3-HORN-SAT

Sean:

$\text{HORN-SAT} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una conjunción de cláusulas de Horn y } \varphi \text{ es satisfacible}\}$

$\text{3-HORN-SAT} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una conjunción de cláusulas de Horn, donde cada clausula tiene a lo más 3 literales, y } \varphi \text{ es satisfacible}\}$

Teorema

HORN-SAT y 3-HORN-SAT son PTIME-completos

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Vamos a definir un vocabulario $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$ -oración Φ en LPO con operador de menor punto fijo tal que:

- ▶ 3-HORN-SAT puede ser reducido a L_Φ en espacio logarítmico

Sea $\mathcal{L} = \{P_1(\cdot), P_2(\cdot, \cdot), P_3(\cdot, \cdot, \cdot), N_1(\cdot), N_2(\cdot, \cdot), N_3(\cdot, \cdot, \cdot)\}$

Además, sean:

$$\begin{aligned}\alpha(u, P) = & P_1(u) \vee \exists v (P_2(u, v) \wedge P(v)) \vee \\ & \exists w_1 \exists w_2 (P_3(u, w_1, w_2) \wedge P(w_1) \wedge P(w_2))\end{aligned}$$

$$\varphi_{\text{pos}}(x) = [\text{Ifp}_{u,P} \alpha(u, P)](x)$$

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Entonces Φ se define como:

$$\begin{aligned} & \neg \exists x (N_1(x) \wedge \varphi_{\text{pos}}(x)) \wedge \\ & \neg \exists x \exists y (N_2(x, y) \wedge \varphi_{\text{pos}}(x) \wedge \varphi_{\text{pos}}(y)) \wedge \\ & \neg \exists x \exists y \exists z (N_3(x, y, z) \wedge \varphi_{\text{pos}}(x) \wedge \varphi_{\text{pos}}(y) \wedge \varphi_{\text{pos}}(z)) \end{aligned}$$

Vamos a mostrar como reducir 3-HORN-SAT a L_Φ en espacio logarítmico

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Sea θ una conjunción de clausulas de Horn con a lo más 3 literales por clausula

- ▶ Suponga que $\theta = \theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_\ell$
- ▶ Suponga que $p_1, \dots, p_n$ son las variables proposicionales mencionadas en θ

Vamos a mostrar como construir una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}_\theta$ tal que:

$$\theta \in 3\text{-HORN-SAT} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A}_\theta \in L_\Phi$$

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Dominio de $\mathfrak{A}_\theta$ es $A = \{p_1, \dots, p_n\}$

$$P_1^{\mathfrak{A}_\theta} = \{p \in A \mid \text{existe } i \in \{1, \dots, \ell\} : \theta_i = p\}$$

$$P_2^{\mathfrak{A}_\theta} = \{(p, q) \in A^2 \mid \text{existe } i \in \{1, \dots, \ell\} : \theta_i = (p \vee \neg q)\}$$

$$P_3^{\mathfrak{A}_\theta} = \{(p, q, r) \in A^3 \mid \text{existe } i \in \{1, \dots, \ell\} : \theta_i = (p \vee \neg q \vee \neg r)\}$$

$$N_1^{\mathfrak{A}_\theta} = \{p \in A \mid \text{existe } i \in \{1, \dots, \ell\} : \theta_i = (\neg p)\}$$

$$N_2^{\mathfrak{A}_\theta} = \{(p, q) \in A^2 \mid \text{existe } i \in \{1, \dots, \ell\} : \theta_i = (\neg p \vee \neg q)\}$$

$$N_3^{\mathfrak{A}_\theta} = \{(p, q, r) \in A^3 \mid \text{existe } i \in \{1, \dots, \ell\} : \theta_i = (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)\}$$

LPO con operador de menor punto fijo y PTIME

Tenemos que demostrar que θ es satisfacible si y sólo si $\mathfrak{A}_\theta \models \Phi$

- ▶ ¿Cómo se demuestra esto?

Además, tenemos que demostrar que la reducción se puede calcular en espacio logarítmico

- ▶ ¿Cómo se demuestra esto?

Concluimos que 3-HORN-SAT se puede reducir a L_Φ en espacio logarítmico

- ▶ Por lo tanto: L_Φ es PTIME-hard



Fórmulas no positivas

¿Qué sucede si ya no pedimos a las fórmulas ser positivas?

- Definimos una nueva lógica (sobre un vocabulario $\mathcal{L}$)

Definición

LPO con operador parcial de punto fijo extiende a LPO con la siguiente regla:

- *Sea $n \geq 1$, $\{R_1, \dots, R_n\}$ un conjunto de símbolos de relación no mencionados en $\mathcal{L}$, y $\varphi_i(\bar{x}_i, R_1, \dots, R_n)$ ($1 \leq i \leq n$) una fórmula en LPO sobre $(\mathcal{L} \cup \{R_1, \dots, R_n\})$ tal que el número de variables en $\bar{x}_i$ es igual al número de argumentos en R_i .*

Entonces para $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$[\mathbf{pfp}_{\bar{x}_k, R_k}(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{y})$$

es una fórmula en LPO con operador parcial de punto fijo, suponiendo que $\bar{x}_k$ e $\bar{y}$ tienen el mismo número de variables.

LPO con operador parcial de punto fijo

Dado: Sistema de fórmulas $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))$, donde cada R_i tiene aridad k_i

Al igual que para el caso de LPO con operador de menor punto fijo:

$$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^i(X_1, \dots, X_n) = \{(a_1, \dots, a_{k_i}) \in A^{k_i} \mid (\mathfrak{A}, X_1, \dots, X_n) \models \varphi_i(a_1, \dots, a_{k_i}, R_1, \dots, R_n)\}$$

Notación

$$T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}(X_1, \dots, X_n) = (T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^1(X_1, \dots, X_n), \dots, T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}^n(X_1, \dots, X_n))$$

LPO con operador parcial de punto fijo

En el sistema $(\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))$ ya **no** pedimos a cada φ_i ser positiva

- ▶ $T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$ puede no tener punto fijo

Sea $\bar{T}_0 = (\emptyset, \dots, \emptyset)$ y $\bar{T}_{n+1} = T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}(\bar{T}_n)$

Definición

$$\mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}) = \begin{cases} \bar{T}_k & \bar{T}_k = \bar{T}_{k+1} \\ \emptyset & \bar{T}_k \neq \bar{T}_{k+1} \text{ para todo } k \geq 0 \end{cases}$$

LPO con operador parcial de punto fijo: Semántica

Para definir la semántica de la LPO con operador parcial de punto fijo sólo tenemos que reemplazar **lfp** por **pfp**:

Definición

$\mathfrak{A} \models [\mathbf{pfp}_{\bar{x}_i, R_i} (\varphi_1(\bar{x}_1, R_1, \dots, R_n), \dots, \varphi_n(\bar{x}_n, R_1, \dots, R_n))](\bar{a})$ si y sólo si $\bar{a}$ pertenece a la i -ésima componente de **pfp**($T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$)

Hay varias preguntas por responder:

- ▶ ¿Está bien definido **pfp**? ¿Es $\mathbf{lfp}(T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}) = \mathbf{pfp}(T_{(\varphi_1, \dots, \varphi_n)})$ si cada fórmula φ_i es positiva?
- ▶ ¿Es esta nueva lógica más expresiva que la LPO con operador de menor punto fijo?
 - ▶ ¿Podemos expresar propiedades difíciles de verificar?

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot), L(\cdot, \cdot)\}$ y

$\mathcal{P} = \{\mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \mid \mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}}, L^{\mathfrak{A}} \rangle, \text{ el grafo } (A, E^{\mathfrak{A}}) \text{ es no dirigido y 3-coloreable, y } L^{\mathfrak{A}} \text{ es un orden lineal en } A\}$

¿Cuál es la complejidad de $\mathcal{P}$?

Proposición

$\mathcal{P}$ es *NP-completo*

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

Proposición

$\mathcal{P}$ es expresable en LPO con operador parcial de punto fijo

Demostración: Queremos encontrar una fórmula φ en LPO con operador parcial de punto fijo tal que:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \in \mathcal{P}$$

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

Definimos φ como $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$

ψ_1 indica que el grafo es no dirigido:

$$\forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow E(y, x))$$

ψ_2 indica que L es un orden lineal:

$$\begin{aligned} \forall x (\neg L(x, x)) \wedge \forall x \forall y (x = y \vee L(x, y) \vee L(y, x)) \wedge \\ \forall x \forall y \forall z (L(x, y) \wedge L(y, z) \rightarrow L(x, z)). \end{aligned}$$

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

Para definir ψ_3 usamos la siguiente fórmula:

$$mc(u, v) = (B(u) \wedge B(v)) \vee (A(u) \wedge A(v)) \vee (R(u) \wedge R(v))$$

Entonces ψ_3 es definida como:

$$\exists u [\mathbf{pfp}_{x,B} (\theta_1(x, B, A, R), \theta_2(y, B, A, R), \theta_3(z, B, A, R))](u)$$

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

$\theta_1(x, B, A, R)$ es definida como:

$$\begin{aligned} & \left(\forall u (\neg B(u) \wedge \neg A(u) \wedge \neg R(u)) \right) \vee \\ & \quad \left(\neg \exists u \exists v (E(u, v) \wedge mc(u, v)) \wedge B(x) \right) \vee \\ & \quad \left(\exists u \exists v (E(u, v) \wedge mc(u, v)) \wedge \right. \\ & \quad \left. \exists w (\neg R(w) \wedge \forall u (L(u, w) \rightarrow R(u)) \wedge (L(x, w) \vee (L(w, x) \wedge B(x)))) \right) \end{aligned}$$

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

$\theta_2(y, B, A, R)$ es definida como:

$$\begin{aligned} & \exists u (B(u) \vee A(u) \vee R(u)) \wedge \\ & \left[\left(\neg \exists u \exists v (E(u, v) \wedge mc(u, v)) \wedge A(y) \right) \vee \right. \\ & \quad \left(\exists u \exists v (E(u, v) \wedge mc(u, v)) \wedge \right. \\ & \quad \exists w (\neg R(w) \wedge \forall u (L(u, w) \rightarrow R(u)) \wedge \\ & \quad \left. \left. ((B(w) \wedge w = y) \vee (L(w, y) \wedge A(y))) \right) \right] \end{aligned}$$

LPO con operador parcial de punto fijo: Poder expresivo

$\theta_3(z, B, A, R)$ es definida como:

$$\begin{aligned} & \exists u (B(u) \vee A(u) \vee R(u)) \wedge \\ & \left[\left(\neg \exists u \exists v (E(u, v) \wedge mc(u, v)) \wedge R(z) \right) \vee \right. \\ & \quad \left(\exists u \exists v (E(u, v) \wedge mc(u, v)) \wedge \right. \\ & \quad \exists w (\neg R(w) \wedge \forall u (L(u, w) \rightarrow R(u)) \wedge \\ & \quad \left. \left. ((A(w) \wedge w = z) \vee (L(w, z) \wedge R(z))) \right) \right]. \end{aligned}$$

□

LPO con operador parcial de punto fijo: Complejidad

Teorema

1. *Para cada vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ -oración φ en LPO con operador parcial de punto fijo se tiene que L_φ está en PSPACE*
2. *Existe un vocabulario $\mathcal{L}$ y una $\mathcal{L}$ -oración φ en LPO con operador parcial de punto fijo tal que L_φ es PSPACE-completo*

Ejercicio

Demuestre la primera parte del teorema

Comentarios finales

Hemos visto varias lógicas.

- ▶ La complejidad de los datos para estas lógicas son distintas

¿Pueden *expresar* clases de complejidad estas lógicas?

- ▶ ¿Es cierto que toda propiedad en PTIME puede ser *expresada* en LPO con operador de menor punto fijo?
- ▶ ¿Qué sucede con el caso de NP y $\exists$ LSO? ¿Y con PSPACE y LPO con operador parcial de punto fijo?

Llamamos a esto **complejidad descriptiva**.

- ▶ Este es el siguiente capítulo a estudiar ...