



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERIA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Complejidad Computacional - IIC3242

Tarea 2

Entrega: Martes 10 de Junio

1. Un sistema de teselación es una tupla $(D, H, V, \bar{b}, \bar{t}, n)$, donde D es un conjunto de azulejos, $H \subseteq D \times D$ es el conjunto de restricciones horizontales, $V \subseteq D \times D$ es el conjunto de restricciones verticales, $\bar{b} \in D^n$ es la fila inicial y $\bar{t} \in D^n$ es la fila final. Diremos que un sistema de teselación $T = (D, H, V, \bar{b}, \bar{t}, n)$ puede cubrir un pasillo si existe un $m \in \mathbb{N}$ y una secuencia $d_0, d_1, \dots, d_{n \cdot m - 1} \in D^{n \cdot m}$ tal que:

$$\begin{aligned}\bar{b} &= d_0, \dots, d_{n-1} \\ \bar{t} &= d_{n \cdot (m-1)}, \dots, d_{n \cdot m - 1} \\ (d_{i-1}, d_i) &\in H \text{ para cada } i \in [1, n \cdot m - 1] \text{ tal que } (i \bmod n) \neq 0 \\ (d_{i-n}, d_i) &\in V \text{ para cada } i \in [n, n \cdot m - 1].\end{aligned}$$

En esta pregunta debes demostrar que el problema de decisión TESELACIONDEPASILLO definido como

$$\{T \mid T \text{ es un sistema de teselación que puede cubrir un pasillo}\}$$

es completo para la clase de complejidad PSPACE.

2. Sea $T = (D, H, V, \bar{b}, \bar{t}, n)$ un sistema de teselación. A continuación definiremos el *juego de teselación* sobre T . En este juego participan dos jugadores que deberán ir agregando filas de azulejos alternadamente. El primer jugador, denominado Duplicador, intentará cubrir un pasillo, mientras el segundo, denominado Spoiler, intentará frustrar el cometido del Duplicador (que el Duplicador no logre llevar a cabo el cubrimiento). El juego se desarrolla por turnos. En cada turno i se debe escoger una secuencia $S_i \in D^n$. Para definir el juego inductivamente, consideraremos que al comenzar el juego se tiene $S_0 = (d_0^0, d_1^0, \dots, d_{n-1}^0) = \bar{b}$. Una vez que se ha jugado $i - 1$ turnos ($i \geq 1$), si $S_{i-1} = \bar{t}$ entonces el juego termina y gana el Duplicador. De lo contrario, si i es impar es el turno del Spoiler, y si es par es el turno del Duplicador. El jugador de turno debe escoger una secuencia $S_i = (d_0^i, \dots, d_{n-1}^i) \in D^n$ tal que $(d_{j-1}^i, d_j^i) \in H$ para cada $j \in [1, n - 1]$ y $(d_{j-1}^{i-1}, d_j^i) \in V$ para cada $j \in [0, n - 1]$. Si no existe tal secuencia, entonces el juego se acaba y el ganador es el Spoiler.

Diremos que existe una estrategia ganadora para el juego de teselación sobre T si el Duplicador puede ganar el juego en un número finito de turnos independiente de cómo juegue el Spoiler. Entonces definimos el problema de decisión TESELACIONALTERNADA como

$$\{T \mid T \text{ es un sistema de teselación y} \\ \text{existe una estrategia ganadora para el juego de teselación sobre } T\}.$$

En esta pregunta debes formalizar el problema C&R definido en [1], y luego demostrar que $C\&R \leq_m^{\log} \text{TESELACIONALTERNADA}$. Demuestre además que estos problemas pertenecen a la clase de complejidad EXPTIME.

3. Dado un conjunto P de variables proposicionales, un conjunto $\Sigma \subseteq L(P)$ y una fórmula $\varphi \in L(P)$, definimos el conjunto $W(\varphi, \Sigma)$ como

$$W(\varphi, \Sigma) = \{\Sigma' \subseteq \Sigma \mid \Sigma' \not\models \neg\varphi \text{ y para cada } \Gamma \text{ tal que } \Sigma' \subset \Gamma \subseteq \Sigma \text{ se tiene que } \Gamma \models \neg\varphi\}.$$

Intuitivamente, el conjunto $W(\varphi, \Sigma)$ contiene a todos los subconjuntos maximales de Σ que son consistentes con φ . Definimos a continuación el problema de decisión REVISIONDECONOCIMIENTO como

$$\{(\Sigma, \varphi, \psi) \mid \Sigma \subseteq L(P), \varphi, \psi \in L(P) \text{ y } \cap W(\varphi, \Sigma) \models \psi\}.$$

En esta pregunta debes demostrar que el problema REVISIONDECONOCIMIENTO es Π_2^P -hard y pertenece a la clase de complejidad Δ_3^P .

Referencias

- [1] M. Mamino. On the computational complexity of a game of cops and robbers. *CoRR*, abs/1202.6043, 2012.