



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Diseño y Análisis de Algoritmos - IIC2283

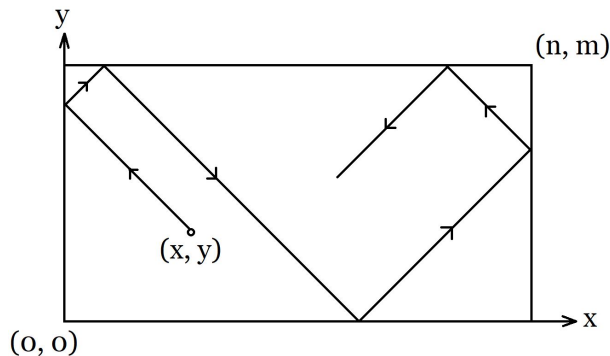
Tarea 3

Entrega: miércoles 9 de diciembre (hasta las 11:59pm)

La solución de cada problema debe ser un programa en Python 3. Estos programas deben ser subidos a su repositorio de git que fue creado para este propósito. Sus archivos deben llamarse `p1.py` y `p2.py` para las preguntas 1 y 2 respectivamente, y estar en la carpeta T3 de su repositorio. Cualquier pregunta de la tarea hágala en el foro del curso (<https://github.com/PUC-IIC2283/2020-IIC2283-Tareas/issues>). Si quiere usar alguna librería en sus soluciones debe preguntar en el foro si esta librería está permitida. El foro es el canal de comunicación oficial para todas las tareas.

Problema 1

Se tiene una mesa de pool de dimensiones $n \times m$ con agujeros en las 4 esquinas. Vista desde arriba, las posiciones en la mesa se pueden describir con un sistema de coordenadas con origen en la esquina inferior izquierda de la mesa, como se ilustra en la siguiente imagen:



Una bola ubicada inicialmente en las coordenadas (x, y) es lanzada con dirección y sentido ya sea paralelos a los ejes o bien formando un ángulo de 45° . La bola tiene un tamaño despreciable, por lo que puede ser modelada como un punto. Al chocar con un borde de la mesa, la bola rebota de manera perfectamente elástica (ver figura), conservando su movimiento de manera indefinida, solo deteniéndose en caso de caer en alguno de los agujeros ubicados en las cuatro esquinas. Puede asumir que la bola nunca parte en una esquina, aunque sí podría partir en algún punto intermedio del borde de la mesa.

Dadas la posición y velocidad iniciales de la bola, se le pide determinar si la bola eventualmente se detendrá en alguna esquina, y de ser así, indicar cuál esquina.

Formato

El input consistirá de una línea con 6 enteros n, m, x, y, v_x, v_y , indicando el ancho y alto de la mesa, las coordenadas iniciales de la bola y las componentes de la velocidad inicial de la bola, respectivamente.

Su output debe ser dos enteros indicando las coordenadas de la esquina donde la bola se detiene, o bien -1 si la bola permanecerá en movimiento perpetuo.

Límites

$$1 \leq n, m \leq 10^9$$

$$0 \leq x \leq n$$

$$0 \leq y \leq m$$

$$-1 \leq v_x, v_y \leq 1$$

Tiempo de ejecución

1 segundo

Complejidad esperada

$$O(\log(\text{máx}\{m, n\}))$$

Ejemplos

Input 1

4 3 2 2 -1 1

Output 1

0 0

Input 2

4 4 2 0 1 1

Output 2

-1

Input 3

10 10 10 1 -1 0

Output 3

-1

Problema 2

Esta pregunta tiene dos partes. En la primera usted va a tener que calcular la función μ de Moebius, que está definida de la siguiente forma para $n \geq 1$:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p_1 p_2 \cdots p_k, \text{ donde } k \text{ es par, cada } p_i \text{ es un número primo, y } p_i \neq p_j \text{ para } i \neq j \\ -1 & \text{si } n = p_1 p_2 \cdots p_k, \text{ donde } k \text{ es impar, cada } p_i \text{ es un número primo, y } p_i \neq p_j \text{ para } i \neq j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En otras palabras, si n es divisible por un cuadrado, entonces $\mu(n) = 0$, y si no, $\mu(n) = (-1)^k$, donde k es la cantidad de primos distintos que dividen a n . Los primeros doce valores de esta función son:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1	-1	0

Esta función es de gran utilidad en análisis numérico y tiene propiedades en base al **principio de inclusión-exclusión**. Por ejemplo, para cada $n > 1$, se tiene que:

$$\sum_{d \text{ divide a } n} \mu(d) = 0.$$

En la segunda parte, usted va a recibir dos números n y m , y utilizando la función μ , va a calcular la cardinalidad del siguiente conjunto:

$$C(n, m) = \{(a, b) \mid a \leq n \text{ y } b \leq m \text{ tales que } \text{MCD}(a, b) = 1\}.$$

Para separar la evaluación, en algunos tests se le va a pedir que simplemente calcule la función μ de un número dado, mientras que en los demás tests, se le va a pedir que reciba dos números n y m y calcule el valor $|C(n, m)|$.

Formato

El input consistirá de una línea y dos o tres números. Esta línea puede ser de la forma 1 n , o de la forma 2 n m . En el primer caso se le pide calcular la función μ y en el segundo la cardinalidad de $C(n, m)$.

Su output debe ser una única línea con el valor pedido.

Límites

$$1 \leq n, m \leq 2 \times 10^5$$

Tiempo de ejecución

5 segundos

Complejidad esperada

$$O((n + m) \log(n + m))$$

Ejemplos

Input 1

1 10

Output 1

1

Input 2

1 12

Output 2

0

Input 2

2 8 10

Output 2

52

En este último caso se tiene que $|C(8, 10)| = 52$ puesto que el conjunto $C(8, 10)$ está compuesto por los siguientes pares marcados con el símbolo \bullet :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet
2	\bullet		\bullet		\bullet		\bullet		\bullet	
3	\bullet	\bullet		\bullet	\bullet		\bullet	\bullet		\bullet
4	\bullet		\bullet		\bullet		\bullet		\bullet	
5	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet		\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	
6	\bullet				\bullet		\bullet			
7	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet	\bullet		\bullet	\bullet	\bullet
8	\bullet		\bullet		\bullet		\bullet		\bullet	