



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC2283 - DISEÑO Y ANÁLISIS DE ALGORITMOS

Ayudantía 9 - Teoría de grupos

6 de noviembre de 2020

Profesor Marcelo Arenas

Bernardo Barías y Ricardo Rodríguez

Pregunta 1-Propiedades basicas

Demuestre que si $(G, \circ)$ es un grupo, entonces se cumplen las siguientes propiedades

- a) El elemento neutro es único, si e_1 y e_2 cumplen que $a \circ e_i = e_i \circ a = a$ para $i \in \{1, 2\}$ y para todo $a \in G$ entonces $e_1 = e_2$
- b) El inverso de cada elemento es único, si $a \circ b = b \circ a = e$ y $a \circ c = b \circ c = e$, entonces $b = c$

Pregunta 2-Algunos ejemplos

Muestre que los siguientes son grupos

- a) $(\mathbb{Z}_n, +)$ con $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ y $+$ la suma módulo n
- b) $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$ con $\cdot$ la multiplicación módulo n
- c) $(J_n, \cdot)$ con $\cdot$ la multiplicación módulo n

Pregunta 3-Subgrupos

$(H, \circ)$ es un subgrupo del grupo $(G, \circ)$ si $\emptyset \subsetneq H \subseteq G$ y $(H, \circ)$ es un grupo

- a) Demuestre que si H es finito, entonces $(H, \circ)$ es subgrupo si y sólo si H es cerrado bajo la operación $\circ$
- b) Pruebe que $(J_n, \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$

Pregunta 4

Sea $\sim$ una relación binaria en el grupo $(G, \circ)$ definida por $a \sim b$ si y sólo si $ab^{-1} \in S$, donde $S \subseteq G$. Pruebe que $\sim$ es una relación de equivalencia si y solo si $(S, \circ)$ es un subgrupo de $(G, \circ)$