



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC2283 - DISEÑO Y ANÁLISIS DE ALGORITMOS

Ayudantía 3 - Algoritmos Codiciosos

4 de septiembre de 2020

Profesor Marcelo Arenas

Bernardo Barías y Ricardo Rodríguez

Pregunta 1 - Programación de Actividades

Dada una lista de actividades $(s_1, e_1), \dots, (s_n, e_n)$ (s_i y e_i son los tiempos de comienzo y de término de la actividad i), se quiere maximizar el número de actividades a realizar sin superponer unas con otras. Diseñe un algoritmo que resuelva este problema y demuestre su correctitud.

Pregunta 2 - Matroides

Existe una teoría sobre algoritmos codiciosos basada en el concepto de matroides, que generaliza muchos de los casos en los cuáles existe un algoritmo codicioso que resuelve correctamente el problema. Una matroide es un par ordenado $M = (S, l)$ que cumple las siguientes condiciones.

1. S es un conjunto finito
2. l es una familia no vacía de subconjuntos de S (llamados subconjuntos independientes de S) que cumplen con ser hereditarios, esto es, si $B \in l$ y $A \subseteq B$, entonces $A \in l$. Notemos que de acá se tiene que $\emptyset \in l$
3. Si $A \in l$, $B \in l$ y $|A| < |B|$ entonces existe algún elemento $x \in B \setminus A$ tal que $A \cup \{x\} \in l$. A esta propiedad la llamamos la propiedad de intercambio

Dado un grafo $G = (V, E)$, un ejemplo importante de una matroide es la matroide asociada al grafo G $M_G = (S_G, l_G)$ donde S_G se define como el conjunto de aristas E y si $A \subseteq E$, se tiene que $A \in l_G$ si y sólo si A no contiene ciclos.

- a) Demuestre que si $G = (V, E)$ es un grafo que no contiene ciclos, entonces $M_G = (S_G, l_G)$ es efectivamente una matroide.
- b) Demuestre que todos los subconjuntos independientes maximales de una matroide (i.e no existe elemento tal que al añadirlo siga siendo independiente) tienen el mismo tamaño.
- c) Decimos que una matroide $M = (S, l)$ tiene pesos si cada elemento de S tiene asociado un peso estrictamente positivo. Dado un conjunto $A \subseteq S$ el peso de A $w(A)$ es la suma de los pesos de sus elementos. De un algoritmo codicioso que entregue el subconjunto independiente de l que tenga el mayor peso.
- d) (Propiedad de la elección codiciosa) Sea $M = (S, l)$ una matroide con pesos. Sea x el elemento de mayor tamaño de S tal que $\{x\}$ es independiente, de existir. Pruebe que si x existe, entonces existe un subconjunto óptimo $A \subset S$ (para el problema de c.)) que contiene a x
- e) Pruebe que el problema de encontrar el subconjunto independiente de peso máximo tiene la propiedad de la subestructura óptima.
- f) Usando todo lo anterior, pruebe que su algoritmo de la parte c) es correcto