



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC2283 - DISEÑO Y ANÁLISIS DE ALGORITMOS

Ayudantía 12 - Average-case complexity

4 de diciembre de 2020

Profesor Marcelo Arenas

Bernardo Barías y Ricardo Rodríguez

Para esta ayudantía consideraremos el problema de 3-COLORABILIDAD:

3-COLORABILIDAD

Input: Un grafo no dirigido $G = (V, E)$.

Output: 1 si existe una 3-coloración válida para el grafo, 0 si no existe.

Se sabe que el problema 3-COLORABILIDAD es NP completo, y por lo tanto, no se conoce un algoritmo determinista que para cualquier entrada resuelva el problema en tiempo polinomial (worst-case complexity). Pero qué pasa en el caso promedio? En general podemos esperar algo mejor?

Para saber la complejidad en el caso promedio debemos para cada $n \in \mathbb{N}$ cómo distribuyen las entradas de tamaño n . En clases vimos que esto corresponde a $\Pr_n(w)$ para $w \in \Sigma^n$, lo que en este caso es un grafo. Para este ejercicio es aceptable asumir que cada grafo con $|V| = n$ vértices tiene la misma probabilidad de ser entrada para el algoritmo.

- Asumiendo la descripción anterior del problema, calcule la cantidad de posibles grafos de n vértices.
- Calcule $\Pr_n(w)$, donde w es un grafo de n vértices.
- Describa un algoritmo determinista que resuelva este problema con complejidad $O(|G|3^n)$ en el peor caso (naive).
- Muestre que un grafo con loops (aristas que comienzan y terminan en el mismo vértice) no es 3-coloreable. Cual es la complejidad de revisar si existen loops en un grafo?
- Combine los incisos c) y d) para obtener un algoritmo un poco mejor que en c).
- Sea $i \in \{1, \dots, n\}$. Defina el evento A_i como que un grafo tenga un loop en el vértice i . Calcule $\Pr(A_i = 1)$. Para $i \neq j$, ¿cómo se relacionan los eventos A_i con A_j ?
- Calcule la probabilidad de que un grafo de n vértices tenga al menos un loop.
- Calcule la complejidad en el caso promedio del algoritmo propuesto en e).
- Proponga un algoritmo determinista que corra en tiempo $O(|G|2^n)$ (worst-case).
- Combine los incisos d) e i) para hacer un algoritmo que corra en tiempo polinomial respecto al tamaño del grafo en el caso promedio.