



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC2283 - DISEÑO Y ANÁLISIS DE ALGORITMOS

Ayudantía 1

21 de agosto de 2020

Profesor Marcelo Arenas

Bernardo Barías y Ricardo Rodríguez

Pregunta 1 - Límites y complejidad asintótica

Sean $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ no nulas. Suponga que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ existe y es igual a ℓ . Demuestre las siguientes afirmaciones:

- a) Si $\ell = 0$, entonces $f \in O(g)$ y $g \notin O(f)$.
- b) Si $\ell = \infty$, entonces $g \in O(f)$ y $f \notin O(g)$.
- c) Si $\ell \in \mathbb{R}^+$, entonces $f \in \Theta(g)$.

Pregunta 2 - Teorema maestro

- a) Aplique el teorema maestro en la ecuación de recurrencia

$$T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}.$$

- b) ¿Puede ser aplicado el teorema maestro a la ecuación de recurrencia $T(n)$ definida a continuación?

$$T(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 4T(n/2) + n^2 \log n & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Calcule una cota asintótica superior de $T(n)$. Asuma que $n = 2^k$, con $k \in \mathbb{N}$.

Pregunta 3 - MergeSort

Un ejemplo clásico de un algoritmo de tipo dividir para conquistar es MERGESORT (o ordenamiento por mezcla), el cual fue creado por John Von Neumann en 1945. MERGESORT es un algoritmo de ordenación con complejidad asintótica $O(n \log(n))$, compuesto por 2 subrutinas.

Algoritmo 1 MERGESORT($A[1 \dots n]$)

```
if  $n > 1$  then
   $m \leftarrow \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 
  MERGESORT( $A[1 \dots m]$ )
  MERGESORT( $A[m + 1 \dots n]$ )
  MERGE( $A[1 \dots n], m$ )
end if
```

Algoritmo 2 MERGE($A[1 \dots n], m$)

```

 $i \leftarrow 1$ 
 $j \leftarrow m + 1$ 
for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
  if  $j > n$  then
     $B[k] \leftarrow A[i]; i \leftarrow i + 1$ 
  else if  $i > m$  then
     $B[k] \leftarrow A[j]; j \leftarrow j + 1$ 
  else if  $A[i] < A[j]$  then
     $B[k] \leftarrow A[i]; i \leftarrow i + 1$ 
  else
     $B[k] \leftarrow A[j]; j \leftarrow j + 1$ 
  end if
end for
for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
   $A[k] \leftarrow B[k]$ 
end for

```

- Demuestre que MERGESORT tiene complejidad $O(n \log(n))$
- Sea $A[1 \dots n]$ un arreglo de números diferentes, si $i < j$ y $A[i] > A[j]$ diremos que el par (i, j) es una inversión de A . Encuentre las 5 inversiones de $\langle 2, 3, 8, 6, 1 \rangle$
- ¿Qué arreglo con elementos de $\{1, \dots, n\}$ tiene más inversiones? ¿Cuántas tiene?
- Dé un algoritmo que determine el número de inversiones en cualquier permutación de n elementos en tiempo $O(n \log(n))$ (Hint: Modifique MERGESORT)