



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC2283 Diseño y análisis de algoritmos
2° semestre 2019

Ayudantía 5

Dudas a Antonio López (alopez7@uc.cl)

Problema 1

Dados los arreglos $a_1, a_2, \dots, a_n$ queremos saber cuales posibles resultados podemos obtener sumando un elemento de cada uno y además nos gustaría saber de cuantas maneras distintas se puede llegar al resultado. Por ejemplo con $a_1 = [4, 2]$, $a_2 = [1, 1, 3]$ y $a_3 = [2, 3]$ podemos sumar 6 de dos maneras, 5 de dos maneras, ..., y 10 de una manera.

1. Expresa este problema como multiplicación de polinomios.
2. Escribe el algoritmo que resuelve el problema.
3. ¿Qué pasa cuando los números de los arreglos son muy grandes?

Solución:

1. Dada una combinación de números de los arreglos $a_1[i_1], a_2[i_2], \dots, a_n[i_n]$ para sumar, el resultado final de la suma puede ser calculado multiplicando factores: $x^{a_1[i_1]} \cdot x^{a_2[i_2]} \cdot \dots \cdot x^{a_n[i_n]}$ donde el exponente final es el resultado de la suma.

Además, si los números usados en la suma se repiten en sus respectivos arreglos, se puede calcular el número de combinaciones de los mismos números multiplicando las repeticiones de estos en sus respectivos arreglos. Por ejemplo: $a_1 = [4, 4, 2]$, $a_2 = [1, 1, 3]$ y $a_3 = [2, 3, 3]$. Si sumamos $4 + 1 + 3$ tomando uno de cada arreglo respectivamente, esto lo podemos hacer de 8 maneras distintas escogiendo las distintas repeticiones de los números en los arreglos ya que se repiten 2 veces en cada arreglo. Por lo tanto podemos agregar como constante que multiplica al factor al número de repeticiones de cada número en cada arreglo: $2 \cdot x^4 \cdot 2 \cdot x^1 \cdot 2 \cdot x^3 = 8 \cdot x^8$.

Por lo tanto, si expresamos cada arreglo como un polinomio donde los exponentes son los valores de los números y las constantes son las repeticiones y multiplicamos todos los polinomios, podemos el resultado final es un polinomio cuyos exponentes son los posibles resultados de las sumas y las constantes son las formas distintas en las que se puede llegar al resultado.

2. El algoritmo para resolver el problema consiste en transformar cada arreglo en un polinomio como el descrito en en la sección anterior, luego multiplicar los polinomios usando FFT y finalmente obtener los valores y las repeticiones de los valores desde los exponentes y las constantes desde el polinomio resultante.

3. El grado del polinomio final va a ser tan grande como la suma de los grados de todos los polinomios a multiplicar. A su vez los grados de los polinomios a multiplicar son el número más grande de cada arreglo. Por lo tanto si el número más grande de cada arreglo es muy grande, el polinomio final va a tener un grado enorme haciendo mucho menos eficiente la multiplicación usando transformada de Fourier. Es por esto que podría ser conveniente multiplicar los polinomios de la forma simple cuando los valores son demasiado grandes.

Problema 2

Dados dos vectores a y b de tamaño n , queremos calcular el producto punto de a con todas las posibles rotaciones cíclicas de b (rotar un vector cíclicamente es mover los elementos del vector una posición y el último elemento moverlo al principio). Por ejemplo: $a = [1, 2, 3]$, $b = [5, 9, 4]$. Las rotaciones cíclicas de b son $[5, 9, 4]$, $[9, 4, 5]$ y $[4, 5, 9]$. Por lo tanto los productos punto de a con las rotaciones son $5 + 18 + 12 = 35$, $9 + 8 + 15 = 32$ y $4 + 10 + 27 = 41$ respectivamente. Explica cómo resolver este problema usando multiplicación de polinomios.

Solución: Si transformamos ambos vectores directamente a un polinomio y los multiplicamos, obtenemos lo siguiente (siguiendo con el ejemplo):

$$(1 \cdot x^0 + 2 \cdot x^1 + 3 \cdot x^2) \cdot (5 \cdot x^0 + 9 \cdot x^1 + 4 \cdot x^2)$$

Si multiplicamos cada elemento del primer polinomio por el segundo polinomio obtenemos los siguientes resultados:

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4
1	5	9	4		
2		10	18	8	
3			15	27	12
+	5	19	37	35	12

Cada valor que aparece en la tabla es uno de los factores que necesitamos para calcular cada uno de los productos entre vectores pero no se están sumando de la manera correcta. Para corregir esto tenemos que modificar un poco los polinomios que usamos: En vez de transformar directamente a a un polinomio, primero damos vuelta el vector obteniendo el siguiente resultado:

$$(3 \cdot x^0 + 2 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2) \cdot (5 \cdot x^0 + 9 \cdot x^1 + 4 \cdot x^2)$$

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4
3	15	27	12		
2		10	18	8	
1			5	9	4
+	15	37	35	27	4

Ahora el valor que acompaña a x^2 corresponde al resultado de uno de los productos punto pero nos falta el resto. Tenemos los elementos a sumar pero necesitamos que queden en las columnas correctas. Si nos damos cuenta, necesitamos que el 15 quede en la columna de x^3 y que el 27 y el 10 queden en la columna del x^4 . Si logramos esto tendremos los resultados correctos de los productos punto en los valores que acompañan a los factores x^2 , x^3 y x^4 . Para esto expandimos el polinomio de b duplicando su largo pero usando los mismo valores repetidos:

$$(3 \cdot x^0 + 2 \cdot x^1 + 1 \cdot x^2) \cdot (5 \cdot x^0 + 9 \cdot x^1 + 4 \cdot x^2 + 5 \cdot x^3 + 9 \cdot x^4 + 4 \cdot x^5)$$

	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
3	15	27	12	15	27	12		
2		10	18	8	10	18	8	
1			5	9	4	5	9	4
+	15	37	35	32	41	35	17	4

Por lo tanto el proceso que hacemos para calcular los productos punto de manera eficiente es:

- Crear a' y b' de tamaño $2 \cdot n$
- Copiar a al revés en la primera parte de a' y rellenar el resto con 0s
- Copiar b 2 veces en b'
- Multiplicar los polinomios que representan a' y b' y obtener el polinomio c
- Retornar las constantes que acompañan a los factores de c desde el x^{n-1} hasta el $x^{2 \cdot n - 2}$. Notar que la constante que acompaña a $x^{2 \cdot n - 1}$ es igual a la que acompaña a x^{n-1} ya que hacer n rotaciones cíclicas a b transforma b en sí mismo.

Problema 3

En una lista, se define un elemento mayoritario como un valor que aparece repetido al menos en la mitad de las posiciones. Desarrolle y analice un algoritmo aleatorizado que resuelva el mismo problema en tiempo lineal.

Solución: La idea es simple: samplear un elemento aleatorio de A y luego contar cuantas veces aparece en el arreglo. Si aparece más de $n/2$ veces, lo retorno. En otro caso, retorno **None**. Este algoritmo toma tiempo lineal: samplear toma tiempo a lo más logarítmico y recorrer el arreglo una vez contando cuantas veces aparece el elemento toma tiempo lineal.

Sobre la probabilidad de error, notemos que cuando no existe un elemento mayoritario entonces el algoritmo siempre retorna **None** y no se equivoca. Por el otro lado, cuando sí existe un elemento mayoritario, entonces la probabilidad de samplearlo es mayor o igual a $1/2$. Por lo tanto, la probabilidad de equivocarse cuando sí existe un elemento mayoritario es menor o igual a $1/2$. En total esto significa que la probabilidad de error es menor o igual a $1/2$.