



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
ESCUELA DE INGENIERÍA  
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC2283 Diseño y análisis de algoritmos  
2° semestre 2019

# Ayudantía 1

Dudas a Antonio López (alopez7@uc.cl)

## Problema 1

El tiempo que demora el algoritmo MergeSort se puede expresar con la siguiente recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2 \cdot T(n/2) + f(n) & n > 1 \end{cases}$$

Donde  $f(n)$  es el tiempo utilizado por la subrutina `merge`. Puede asumir que  $n = 2^k$ . Resuelva la recurrencia anterior en los siguientes casos:

1.  $f(n) = C \cdot n$  donde  $C$  con  $C > 0$

**Solución:** Podemos desarrollar la recurrencia de la siguiente forma:

$$T(n) = T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + C \cdot 2^k$$

$$T(n) = 2 \cdot (2 \cdot T(2^{k-2}) + C \cdot 2^{k-1}) + C \cdot 2^k$$

$$T(n) = 2^2 \cdot T(2^{k-2}) + C \cdot (2^k + 2^k)$$

$$T(n) = 2^2 \cdot T(2 \cdot T(2^{k-3}) + C \cdot 2^{k-2}) + C \cdot (2^k + 2^k)$$

$$T(n) = 2^3 \cdot T(2^{k-3}) + C \cdot (2^k + 2^k + 2^k)$$

Si seguimos desarrollando hasta la iteración  $i$  llegamos a la expresión:

$$T(n) = 2^i \cdot T(2^{k-i}) + C \cdot i \cdot 2^k$$

Y cuando  $i = k$ :

$$T(n) = 2^k \cdot T(1) + C \cdot k \cdot 2^k$$

Finalmente reemplazamos  $2^k = n$ ,  $k = \log_2 n$  y  $T(1) = 1$

$$T(n) = n + C \cdot n \log_2 n$$

Por lo tanto  $T(n) \in \Theta(n \log n)$

2. El método **merge** fue implementado de manera ineficiente tal que  $f(n) = C \cdot n^2$  con  $C > 0$

**Solución:** Podemos desarrollar la recurrencia de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + C \cdot (2^k)^2 \\
 T(n) &= 2 \cdot (2 \cdot T(2^{k-2}) + C \cdot (2^{k-1})^2) + C \cdot (2^k)^2 \\
 T(n) &= 2^2 \cdot T(2^{k-2}) + C \cdot (2 \cdot (2^{k-1})^2 + (2^k)^2) \\
 T(n) &= 2^2 \cdot T(2 \cdot T(2^{k-3}) + C \cdot (2^{k-2})^2) + C \cdot (2 \cdot (2^{k-1})^2 + (2^k)^2) \\
 T(n) &= 2^3 \cdot T(2^{k-3}) + C \cdot (2^2 \cdot (2^{k-2})^2 + 2^1 \cdot (2^{k-1})^2 + 2^0 \cdot (2^k)^2)
 \end{aligned}$$

Si seguimos desarrollando hasta la iteración  $i$  llegamos a la expresión:

$$T(n) = 2^i \cdot T(2^{k-i}) + C \cdot \sum_{j=0}^{i-1} 2^j \cdot (2^{k-j})^2$$

Y cuando  $i = k$ :

$$T(n) = 2^k \cdot T(1) + C \cdot \sum_{j=0}^{k-1} 2^j \cdot (2^{k-j})^2$$

Ahora trabajamos la sumatoria para sacar el término  $2^k$  y simplificar  $2^j$ :

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 2^k \cdot T(1) + C \cdot \sum_{j=0}^{k-1} 2^j \cdot \left(\frac{2^k}{2^j}\right)^2 \\
 T(n) &= 2^k \cdot T(1) + C \cdot (2^k)^2 \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^j}
 \end{aligned}$$

Esta sumatoria está acotada entre los valores 1 y 2 por lo que podemos transformar  $c \cdot \sum$  en  $C_1$ :

$$T(n) = 2^k \cdot T(1) + C_1 \cdot (2^k)^2$$

Finalmente reemplazamos  $2^k = n$ ,  $k = \log_2 n$  y  $T(1) = 1$

$$T(n) = n + C_1 \cdot n^2$$

Por lo tanto  $T(n) \in \Theta(n^2)$

3. El método **merge** funciona mágicamente en tiempo  $f(n) = C$  con  $C > 0$

**Solución:** Podemos desarrollar la recurrencia de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 T(n) &= T(2^k) = 2 \cdot T(2^{k-1}) + C \\
 T(n) &= 2 \cdot (2 \cdot T(2^{k-2}) + C) + C \\
 T(n) &= 2^2 \cdot T(2^{k-2}) + C \cdot (2 + 1) \\
 T(n) &= 2^2 \cdot T(2 \cdot T(2^{k-3}) + C) + C \cdot (2 + 1) \\
 T(n) &= 2^3 \cdot T(2^{k-3}) + C \cdot (2^2 + 2^1 + 2^0)
 \end{aligned}$$

Si seguimos desarrollando hasta la iteración  $i$  llegamos a la expresión:

$$T(n) = 2^i \cdot T(2^{k-i}) + C \cdot \sum_{j=0}^{i-1} 2^j$$

Y cuando  $i = k$ :

$$T(n) = 2^k \cdot T(1) + C \cdot \sum_{j=0}^{k-1} 2^j$$

El valor de esta sumatoria es  $2^k - 1$  por lo que lo reemplazamos:

$$T(n) = 2^k \cdot T(1) + C \cdot (2^k - 1)$$

Finalmente reemplazamos  $2^k = n$ ,  $k = \log_2 n$  y  $T(1) = 1$

$$T(n) = n + C \cdot (n - 1)$$

Por lo tanto  $T(n) \in \Theta(n)$

## Problema 2

1. Sea  $p(n)$  un polinomio de grado  $k \leq 0$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ . Demuestre que  $p(n) \in O(n^k)$

**Solución:** El polinomio  $p$  es de la forma  $p(n) = a_0 \cdot n^0 + a_1 \cdot n^1 + \dots + a_k \cdot n^k$ . Donde  $a_k > 0$  y  $p(n) \geq 0 \forall n > 0$ .

Primero creamos un polinomio  $p'(n) = |a_0| \cdot n^0 + |a_1| \cdot n^1 + \dots + |a_k| \cdot n^k$ . Se cumple que  $p(n) \leq p'(n) \forall n \geq 0$ .

Por lo anterior si  $p'(n) \in O(n^k)$  entonces  $p(n) \in O(n^k)$

Ahora creamos el polinomio  $p''(n)$  de la siguiente forma:

$$p''(n) = n^k \cdot \sum_{i=0}^k |a_i|$$

$p''(n)$  es de la forma  $C \cdot n^k$  con  $c > 0$  ya que la sumatoria es una constante y solo suma elementos no negativos.

Además  $p'(n) \leq p''(n) \forall n > 0$  por lo que si  $p''(n) \in O(n^k)$  entonces  $p'(n) \in O(n^k)$ .

Finalmente podemos demostrar que  $p''(n) \in O(n^k)$  ya que  $p''(n) \leq C \cdot n^k \forall n > 0$ . Por lo tanto  $p'(n) \in O(n^k)$  y  $p(n) \in O(n^k)$

2. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) Si  $f(n) \in O(n)$  entonces  $f(n)^2 \in O(n^2)$

**Solución:** Esto es correcto y lo podemos demostrar partiendo del hecho de que  $f(n) \in O(n)$

Por definición existen valores  $C, n_0 > 0$  tal que  $f(n) \leq C \cdot n \forall n > n_0$

Si esta inecuación la elevamos al cuadrado se mantiene la orientación de la desigualdad ya que ambos lados de la ecuación son positivos. Por lo tanto:

$$f(n)^2 \leq C^2 \cdot n^2 \forall n > n_0. \text{ Por definición } f(n)^2 \in O(n^2)$$

b) Si  $f(n) \in O(n)$  entonces  $2^{f(n)} \in O(2^n)$

**Solución:** podemos demostrar que esto es incorrecto con el siguiente contraejemplo:  $f(n) = 2 \cdot n$

Tenemos que  $2 \cdot n \in O(n)$  pero si tratamos de demostrar que  $2^{2 \cdot n} \in O(2^n)$  llegamos a una contradicción:

$$\text{Asumimos que existen } C, n_0 > 0 \text{ tal que } 2^{2 \cdot n} \leq C \cdot 2^n \forall n > n_0$$

Si dividimos la inecuación por  $2^n$  obtenemos que  $2^n \leq C \forall n > n_0$ . Sabemos que esto no es verdad para  $n > \log_2 n$  por lo que llegamos a una contradicción.

c) Si  $f(n) \in O(g(n))$  entonces  $f(2 \cdot n) \in O(g(n))$

**Solución:** Podemos usar un contraejemplo para mostrar que esto es falso:  $f(n) = 2^n$

Sabemos por el ejercicio anterior que  $2^{2 \cdot n} \notin O(2^n)$  por lo que la afirmación es falsa.

3. Suponga que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ . Demuestre lo siguiente:

a) Si  $\ell = 0$  entonces  $f \in O(g)$  y  $g \notin O(f)$

**Solución:** Por definición de límite sabemos que dado un  $\epsilon$  arbitrariamente cercano a 0 podemos encontrar un  $x_0$  tal que  $|\ell - \frac{f(x)}{g(x)}| < \epsilon \forall x > x_0$

$$\text{Ya que } \ell = 0 \text{ y que } \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \text{ tenemos que } \frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon \forall x > x_0$$

Como  $g(x) \geq 0$  podemos pasar multiplicando y obtenemos que  $f(x) < \epsilon \cdot g(x) \forall x > x_0$ . Esto por definición quiere decir que  $f(x) \in O(g(x))$ .

Por otro lado si suponemos que  $g(x) \in O(f(x))$  tendríamos que existen  $C, x_0 > 0$  tal que  $g(x) < C \cdot f(x) \forall x > x_0$ . Podemos demostrar que esto es falso si pasamos dividiendo  $g(x)$ :

$$1 < C \cdot \frac{f(x)}{g(x)} \forall x > x_0$$

Pero sabemos que  $\frac{f(x)}{g(x)}$  tiende a 0 cuando  $x$  tiende a  $\infty$  por lo que al infinito  $1 < 0$ . Esto es una contradicción por lo que  $g(x) \notin O(f(x))$

b) Si  $\ell = \infty$  entonces  $g \in O(f)$  y  $f \notin O(g)$

**Solución:** Si damos vuelta la expresión  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$  tenemos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$  por lo que se transforma en el ejercicio anterior.

c) Si  $\ell \in \mathbb{R}^+$  entonces  $f \in \Theta(g)$

**Solución:** Por definición de límite sabemos que dado un  $\epsilon$  arbitrariamente cercano a 0 podemos encontrar un  $x_0$  tal que  $|\ell - \frac{f(x)}{g(x)}| < \epsilon \forall x > x_0$ .

Esta desigualdad se puede convertir en  $-\epsilon < \ell - \frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon \forall x > x_0$ . Ahora restamos  $\ell$  para obtener:

$$-\epsilon - \ell < -\frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon - \ell$$

Luego multiplicamos por  $-1$  dando vuelta las inecuaciones:

$$\ell - \epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \ell + \epsilon$$

Multiplicamos por  $g(x)$  el cual sabemos que es mayor a 0:  $(\ell - \epsilon) \cdot g(x) < f(x) < (\ell + \epsilon) \cdot g(x) \forall x > x_0$

Por definición  $f(x) \in O(g(x))$  y  $f(x) \in \Omega(g(x))$ . Por lo tanto  $f(x) \in \Theta(g(x))$

4. Encuentre funciones  $f$  y  $g$  tales que  $f \in \Theta(g)$  pero  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$  no existe

**Solución:** Una solución válida es  $f(x) = C + 2 + \sin(x)$  y  $g(x) = C$  donde  $C > 0$ .

## Problema 3

Demuestre las siguientes afirmaciones:

1.  $n! \in \Omega(2^n)$

**Solución:** Para todo  $n \geq 4$  se cumple que  $n! > 2^n$  por lo tanto  $n! \in \Omega(2^n)$

2.  $n^n \notin O(n!)$

**Solución:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$  por lo que como demostramos en el problema 3:  $n^n \notin O(n!)$

3.  $\log(n^n) \in O(\log(n!))$

**Solución:** Primero demostraremos que  $\log(n^n) \in O(\log((\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}))$  y luego que  $\log((\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}) \in O(\log(n!))$ . Esto en conjunto sirve para probar que  $\log(n^n) \in O(\log(n!))$  ya que  $\log((\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}) < \log(n^n)$ .

Primero encontraremos una constante  $C$  tal que  $\log(n^n) \leq C \cdot \log((\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}})$ :

$$n \cdot \log(n) \leq C \cdot \left(\frac{n}{2}\right) \cdot \log\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$n \cdot \log(n) \leq C \cdot \left(\frac{n}{2}\right) \cdot (\log(n) - \log(2))$$

$$n \cdot \log(n) \leq \frac{C}{2} \cdot n \cdot \log(n) - \frac{C}{2} \cdot n \cdot \log(2)$$

Para  $n > 0$  se cumple que:

$$n \cdot \log(n) \leq \frac{C}{2} \cdot n \cdot \log(n)$$

Por lo tanto  $C \geq 2$ . Esto quiere decir que  $\log(n^2) \leq 2 \cdot \log((\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}) \forall n > 0$ . Por lo tanto  $\log(n^n) \in O(\log((\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}))$

Ahora demostraremos que  $\log((\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}) \in O(\log(n!))$ : Es fácil ver que  $(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}} \leq n!$  para  $n > 2$ . Por lo tanto  $\log((\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}) < \log(n!) \forall n > 2$ . Por lo tanto  $\log((\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}) \in O(\log(n!))$ .