



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Diseño y Análisis de Algoritmos - IIC2283

Examen

Tiempo: 3 horas

0. Dé una estimación e de la nota de su prueba. Si la nota real r de su prueba satisface que $|e - r| \leq 0.5$, entonces usted recibirá 0.2 puntos en su nota final. Por favor dé esta estimación en la misma hoja de respuesta que la pregunta 1.
1. Dado $n \geq 2$, recuerde que definimos la matriz M_n como $M_n[i, j] = \omega_n^{(i-1) \cdot (j-1)}$, y definimos la matriz M_n^* como la matrix adjunta de M_n , vale decir, $M_n^*[i, j] = \omega_n^{-(i-1) \cdot (j-1)}$.
 - (a) [0.6 puntos] Demuestre que $M_n^* \cdot M_n = n \cdot I_n$, donde I_n es la matriz identidad de orden $n \times n$.
 - (b) [0.6 puntos] Demuestre que $M_n^* = M_n \cdot P_n$, donde P_n es la siguiente matriz de permutación de orden $n \times n$:

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) [0.8 puntos] Sea $\bar{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, $\mathbf{DFT}(\bar{a}) = [y_0, y_1, \dots, y_{n-1}]$ y $\bar{p} = (y_0, y_{n-1}, \dots, y_1)$. Utilizando (a) y (b), demuestre que:

$$\frac{1}{n} \cdot \mathbf{DFT}(\bar{p}) = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}].$$

2. Sea φ una fórmula proposicional en DNF, vale decir, una fórmula de la forma $D_1 \vee \dots \vee D_m$, donde cada D_i es una conjunción de literales, es decir, una conjunción de variables proposicionales y negaciones de variables proposicionales. Por ejemplo, $(x_1 \wedge x_2) \vee (\neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_5) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_3)$ es una fórmula en DNF. Suponemos que $m \geq 2$, cada conjunción D_i contiene $\ell_i \geq 1$ literales ($1 \leq i \leq m$), y que D_i no contiene literales repetidos ni complementarios (no contiene al mismo tiempo a una variables proposicional y a su negación).

En esta pregunta vamos a desarrollar un algoritmo aleatorizado para aproximar el número de valuaciones que satisfacen a φ , lo cual es denotado como $\#\text{DNF}(\varphi)$.

- (a) [0.2 puntos] Defina el conjunto S de la siguiente forma:

$$S = \{(\sigma, i) \mid i \in \{1, \dots, m\} \text{ y } \sigma \text{ es una valuación tal que } \sigma(D_i) = 1\}.$$

Dé un algoritmo eficiente para calcular $|S|$, vale decir, un algoritmo que calcule $|S|$ en tiempo polinomial en el tamaño de φ .

- (b) [0.5 puntos] Dé un algoritmo eficiente que retorne un elemento de S con distribución uniforme (de la misma forma que en la pregunta anterior, esto significa que el algoritmo debe funcionar en tiempo polinomial en el tamaño de φ , pero suponiendo que puede generar un número aleatorio 0 ó 1 con distribución uniforme y en tiempo constante).
- (c) [0.2 puntos] Defina $\sim$ como la siguiente relación de equivalencia sobre S : $(\sigma_1, i_1) \sim (\sigma_2, i_2)$ si y sólo si $\sigma_1 = \sigma_2$. Recuerde que $[(\sigma, i)]_\sim$ es la clase de equivalencia de un elemento $(\sigma, i) \in S$, y que $S/\sim$ es el conjunto cociente de S dado $\sim$, vale decir,

$$S/\sim = \{[(\sigma, i)]_\sim \mid (\sigma, i) \in S\}.$$

Demuestre que $|S/\sim| = \#\text{DNF}(\varphi)$.

- (d) [0.2 puntos] Suponga que los elementos de S son escogidos con distribución uniforme, y suponga que X es una variable aleatoria tal que para cada $(\sigma, i) \in S$, se tiene que

$$X((\sigma, i)) = \frac{|S|}{|[(\sigma, i)]_\sim|}.$$

Demuestre que $E(X) = |S/\sim|$, y note que de esto se concluye que $E(X) = \#\text{DNF}(\varphi)$.

- (e) [0.2 puntos] Suponga que $X_1, \dots, X_k$ son k variables aleatorias independientes, y suponga que cada una de ellas es idéntica a X . Demuestre que dado $\varepsilon \in (0, 1)$, se tiene que:

$$\Pr(|\bar{X} - E(X)| \geq \varepsilon \cdot E(X)) \leq \frac{\text{Var}(X)}{k \cdot \varepsilon^2 \cdot E(X)^2},$$

donde $\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i$.

- (f) [0.4 puntos] Demuestre que:

$$\frac{\text{Var}(X)}{E(X)^2} \leq (m^2 - 1)$$

- (g) [0.3 puntos] Utilizando los resultados anteriores demuestre que para cada $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\Pr\left(\frac{|\bar{X} - \#\text{DNF}(\varphi)|}{\#\text{DNF}(\varphi)} < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{m^2 - 1}{k \cdot \varepsilon^2}$$

En particular, indique qué valor del número de muestras k nos asegura que vamos a tener un error menor al 0.1 % con probabilidad $\frac{999}{1000}$, vale decir, qué valor de k asegura que:

$$\Pr\left(\frac{|\bar{X} - \#\text{DNF}(\varphi)|}{\#\text{DNF}(\varphi)} < \frac{1}{1000}\right) \geq \frac{999}{1000}$$

3. Dada una lista $[x_1, \dots, x_n]$ de números complejos (que puede tener elementos repetidos), en esta pregunta usted debe construir un algoritmo que calcule un polinomio $p(x)$ en forma canónica tal que las raíces del polinomio son exactamente $[x_1, \dots, x_n]$. Por ejemplo, para la lista $[1, 2, 1]$, se tiene que:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 1) \\ &= x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \end{aligned}$$

Nótese que un algoritmo basado en la idea mostrada en este ejemplo funciona en tiempo $O(n^2)$ para una lista de entrada de largo n , considerando a la suma y multiplicación de dos números complejos como las operaciones básicas a contar. En esta pregunta usted debe construir un algoritmo más eficiente, el cual debe funcionar en tiempo $O(n \cdot (\log_2(n))^2)$.

- (a) [1 punto] Utilizando la técnica de dividir para conquistar construya un algoritmo que, dada una lista $[x_1, \dots, x_n]$ de números complejos donde n es una potencia de 2, retorne un polinomio $p(x)$ en forma canónica cuyas raíces son exactamente $[x_1, \dots, x_n]$. Justifique por qué su algoritmo funciona correctamente.
- (b) [1 punto] Dé una ecuación de recurrencia para el número $T(n)$ de sumas y multiplicaciones de números complejos que debe realizar su algoritmo, donde n es el largo de la lista de entrada. Resuelva la ecuación y demuestre que $T(n) \in O(n \cdot (\log_2(n))^2)$.