



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Diseño y Análisis de Algoritmos - IIC2283

Examen

Tiempo: 2.5 horas

En este examen debe contestar 4 de las siguientes 5 preguntas.

1. Responda las siguientes preguntas.

- (a) [0.8 puntos] Sean $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ funciones tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c$ con $c \in \mathbb{R}^+$. Demuestre que $f \in \Theta(g)$.
- (b) [0.7 puntos] Construya dos funciones $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tales que $f \in \Theta(g)$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ no existe.

2. Responda las siguientes preguntas.

- (a) [0.7 puntos] El algoritmo de ordenamiento **Mergesort** utiliza como sub-rutina un procedimiento que, dadas dos listas ordenadas de menor a mayor L_1 y L_2 , construye una lista ordenada de menor a mayor L que resulta de mezclar los elementos de L_1 y L_2 . Suponga que el procedimiento para mezclar listas puede ser implementado realizando un número constante de comparaciones (no depende del largo de las listas de entrada). ¿Cuál es el orden de **Mergesort** en este caso, suponiendo que la operación básica a contar es la comparación? Justifique su respuesta.
- (b) [0.8 puntos] Considere el problema de calcular la mediana de una lista de largo impar y sin elementos repetidos, y suponga que $\mathcal{A}$ es un algoritmo que resuelve este problema. Demuestre que si $\mathcal{A}$ recibe como entrada una lista L de largo $n \geq 1$, entonces en el peor caso $\mathcal{A}$ debe realizar al menos n accesos a los elementos de L .
3. [1.5 puntos] Dada una lista $L = [a_1, \dots, a_n]$ de números enteros, decimos que $[a_{i_1}, \dots, a_{i_k}]$ es una sub-secuencia creciente de L si $k \geq 1$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ y $a_{i_j} < a_{i_{j+1}}$ para cada $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Por ejemplo, si $L = [2, -3, 6, -1, 4]$, entonces $[-3]$, $[-3, 4]$, $[-1, 4]$ y $[2, 6]$ son sub-secuencias crecientes de L .

Dada una lista L , defina $\text{MaxSec}(L)$ como el mayor largo de las sub-secuencias crecientes de L . Por ejemplo, si $L = [2, -3, 6, -1, 4]$, entonces $\text{MaxSec}(L) = 3$ puesto que $[-3, -1, 4]$ es la sub-secuencia creciente de L de mayor largo. Utilizando la técnica de programación dinámica construya un algoritmo que, dada una lista L , calcule $\text{MaxSec}(L)$. Analice la complejidad de su algoritmo y muestre que funciona en tiempo $O(n^k)$ en el peor caso, donde k es una constante, n es el largo de la lista L de entrada y la comparación es la operación básica a contar.

4. [1.5 puntos] Demuestre el Teorema de Lagrange. Vale decir, demuestre que si $(G, \circ)$ es un grupo finito y $(H, \circ)$ es un subgrupo de $(G, \circ)$, entonces $|H|$ divide a $|G|$.

5. [1.5 puntos] Sea $G = (N, A)$ un grafo no dirigido y sin loops, vale decir, (1) N es un conjunto (finito) de nodos, y (2) A es un conjunto de arcos $\{c, d\}$ tal que $c, d \in N$ y $c \neq d$, donde la notación de conjunto es usada para no indicar dirección.¹ Dados conjuntos de nodos C, D tales que $C \cup D = N$ y $C \cap D = \emptyset$, el corte de G definido por C y D es el siguiente conjunto de arcos:

$$\partial(C, D) = \{\{c, d\} \in A \mid c \in C \text{ y } d \in D\}$$

Nótese que $\partial(C, D) = \partial(D, C)$. Además, el máximo corte para G es definido de la siguiente forma:

$$\text{MaxCorte}(G) = \max \{ |\partial(C, D)| \mid C \cup D = N \text{ y } C \cap D = \emptyset \}$$

Considere el siguiente algoritmo aleatorizado para calcular el máximo corte de un grafo G no dirigido y sin loops:

CorteMáximo(G)

$N :=$ conjunto de nodos de G

$C := \emptyset$

$D := \emptyset$

for each $c \in N$ **do**

 escoja un número b en $\{0, 1\}$ con distribución uniforme

if $b = 0$ **then** $C := C \cup \{c\}$

else $D := D \cup \{c\}$

return $|\partial(C, D)|$

Demuestre que para cada grafo G no dirigido y sin loops, si X_G es una variable aleatoria que indica el valor retornado por **CorteMáximo**(G), entonces se tiene que:

$$E(X_G) \geq \frac{1}{2} \cdot \text{MaxCorte}(G)$$

Nota: para resolver este problema puede ser una buena idea expresar X_G como una sumatoria de variables aleatorias con distribución de Bernoulli.

¹Nótese que $\{c, d\} = \{d, c\}$.