Transformación de dominio y la transformada rápida de Fourier

IIC2283

Representación de un polinomio

La representación canónica de un polinomio $p(x)$ no nulo es:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

donde $n \geq 1$, $a_{n-1} \neq 0$ y el grado de $p(x)$ es $n-1$

Los coeficientes a_i de $p(x)$ son números racionales

- Pero vamos a evaluar estos polinomios tanto sobre números racionales como sobre números reales y complejos

Representamos $p(x)$ a través del vector $(a_0, \ldots, a_{n-1})$

- También podemos representar $p(x)$ como un vector $(a_0, \ldots, a_{n-1}, 0, \ldots, 0)$ donde cada términos x^i tiene coeficiente 0 si $i \geq n$

Suma de polinomios

La suma de dos polinomios $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ y $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ es un polinomio $(c_0, \ldots, c_{n-1})$ tal que:

$$c_i = a_i + b_i \qquad \text{para } i \in \{0, \ldots, n-1\}$$

Consideramos a la suma y multiplicación de números en $\mathbb{C}$ como las operaciones básicas a contar.

- La suma de dos polinomios puede ser calculada en tiempo $O(n)$

Multiplicación de polinomios

La multiplicación de dos polinomios $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ y $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ es un polinomio $(c_0, \ldots, c_{2n-2})$ tal que:

$$c_i = \sum_{k,\ell \in \{0,\ldots,n-1\} \,:\, k+\ell=i} a_k \cdot b_\ell \qquad \text{para } i \in \{0, \ldots, 2n-2\}$$

La multiplicación de dos polinomios puede ser calculada en tiempo $O(n^2)$

- ¿Podemos realizar esta operación en un orden menor?

Una representación alternativa de un polinomio

Un polinomio $p(x)$ de grado $n-1$ se puede representar de manera única a través de un conjunto de n pares de puntos-valores:

$$\{(v_0, p(v_0)), (v_1, p(v_1)), \ldots, (v_{n-1}, p(v_{n-1}))\},$$

suponiendo que $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$

Ejemplo

El polinomio $p(x) = 1 + x + x^2$ es representado de manera única a través del conjunto de pares de puntos-valores:

$$\{(0, 1), (1, 3), (2, 7)\}$$

y también a través del conjunto de pares de puntos-valores:

$$\{(-2, 3), (0, 1), (5, 31)\}$$

Una representación alternativa de un polinomio

Un polinomio $p(x)$ de grado $n-1$ también se puede representar de manera única a través de un conjunto de pares de puntos-valores con $m > n$ elementos:

$$\{(v_0, p(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, p(v_{n-1})), (v_n, p(v_n)), \ldots, (v_{m-1}, p(v_{m-1}))\},$$

suponiendo que $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$

Ejemplo

El polinomio $p(x) = 1 + 2x$ es representado de manera única a través del conjunto de pares de puntos-valores:

$$\{(0, 1), (1, 3), (2, 5)\}$$

y también a través del conjunto de pares de puntos-valores:

$$\{(-2, -3), (0, 1), (5, 11), (7, 15)\}$$

¿Por qué es útil la representación basada en puntos-valores?

Sean $p(x)$ y $q(x)$ polinomios de grado $n-1$ representados por:

$$\{(v_0, p(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, p(v_{n-1}))\}$$
$$\{(v_0, q(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, q(v_{n-1}))\}$$

El polinomio $r(x) = p(x) + q(x)$ es representado por:

$$\{(v_0, p(v_0) + q(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, p(v_{n-1}) + q(v_{n-1}))\}$$

¿Por qué es útil la representación basada en puntos-valores?

Suponga que se agrega n puntos a las representaciones de $p(x)$ y $q(x)$:

$$\{(v_0, p(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, p(v_{n-1})), (v_n, p(v_n)), \ldots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}))\}$$
$$\{(v_0, q(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, q(v_{n-1})), (v_n, q(v_n)), \ldots, (v_{2n-1}, q(v_{2n-1}))\}$$

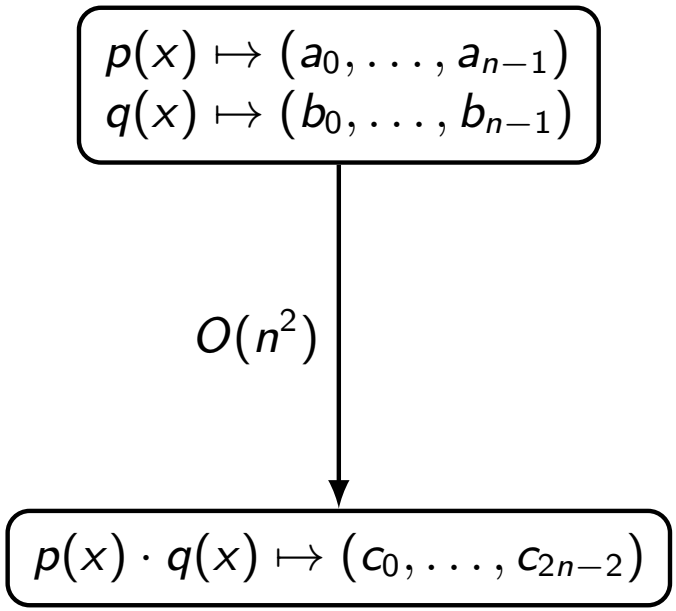
El polinomio $s(x) = p(x) \cdot q(x)$ es representado por:

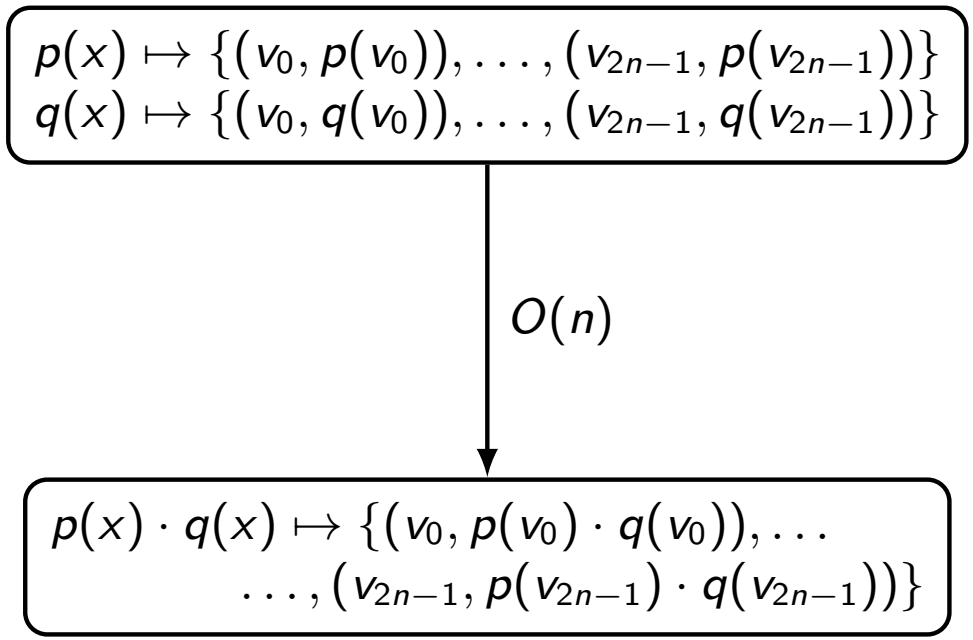
$$\{(v_0, p(v_0) \cdot q(v_0)), \ldots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}) \cdot q(v_{2n-1}))\}$$

¡Podemos sumar y multiplicar polinomios en tiempo $O(n)$ si están representados por pares de puntos-valores!

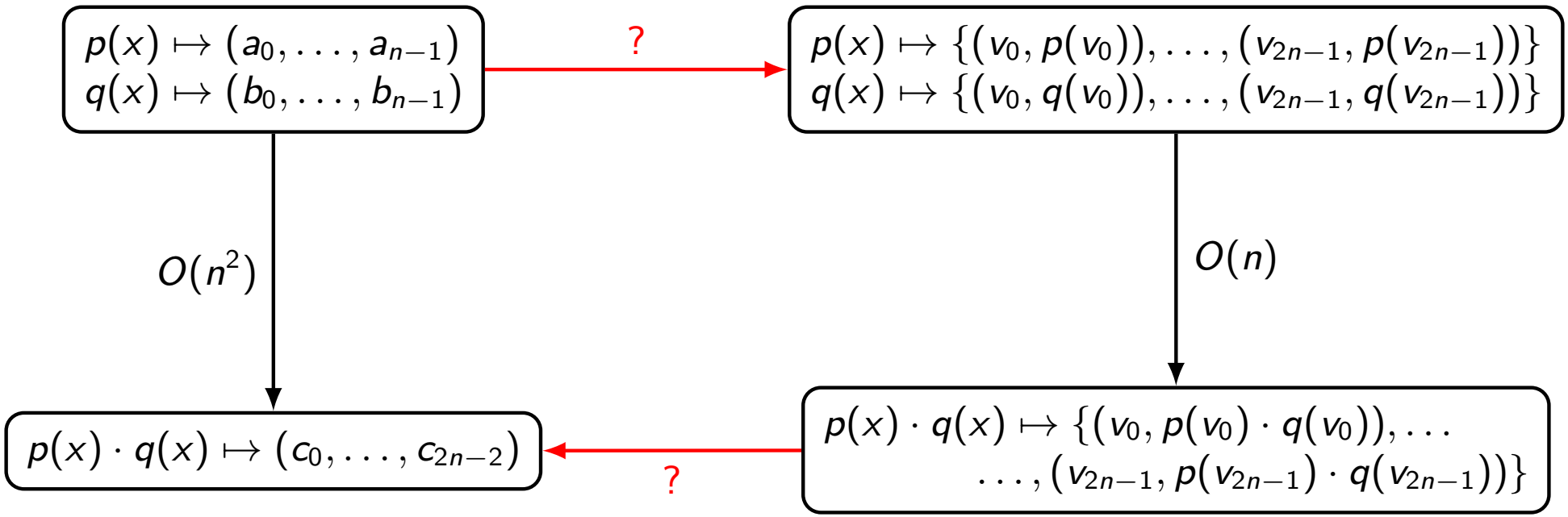
- Suponiendo que usamos los mismos puntos v_0, v_1, ..., v_{2n-1}

La situación hasta ahora





La situación hasta ahora



De la representación canónica a la de puntos-valores

Ejercicio

Dado un polinomio $p(x)$ de grado n en su representación canónica y un punto v, de un algoritmo que calcule $p(v)$ en tiempo $O(n)$

Podemos entonces pasar de la representación canónica a la de puntos-valores en tiempo $O(n^2)$

De la representación puntos-valores a la canónica

Sea $p(x)$ un polinomio de grado $n-1$ dado por una representación punto-valores:

$$\{(v_0, p(v_0)), \ldots, (v_{n-1}, p(v_{n-1})), (v_n, p(v_n)), \ldots, (v_{m-1}, p(v_{m-1}))\},$$

donde $m \geq n$

Podemos pasar a la representación canónica de $p(x)$ utilizando fórmula de Lagrange:

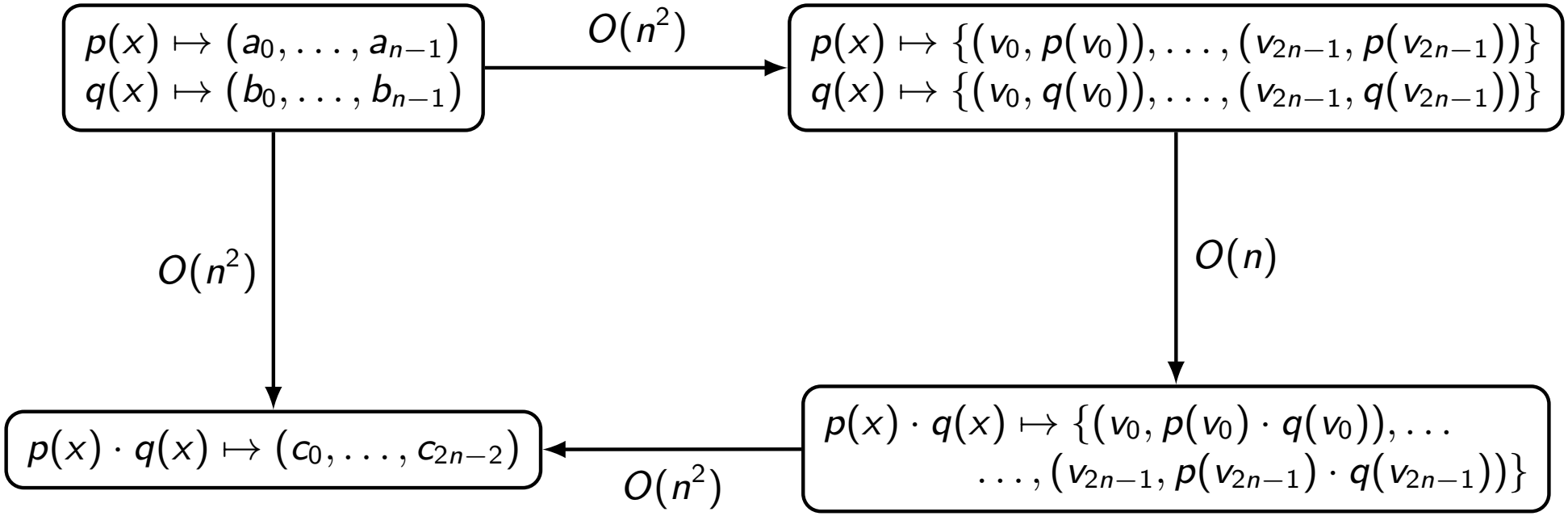
$$p(x) = \sum_{i=0}^{m-1} p(v_i) \cdot \left(\prod_{j \in \{0,\ldots,m-1\} : j \neq i} \frac{(x - v_j)}{(v_i - v_j)} \right)$$

De la representación puntos-valores a la canónica

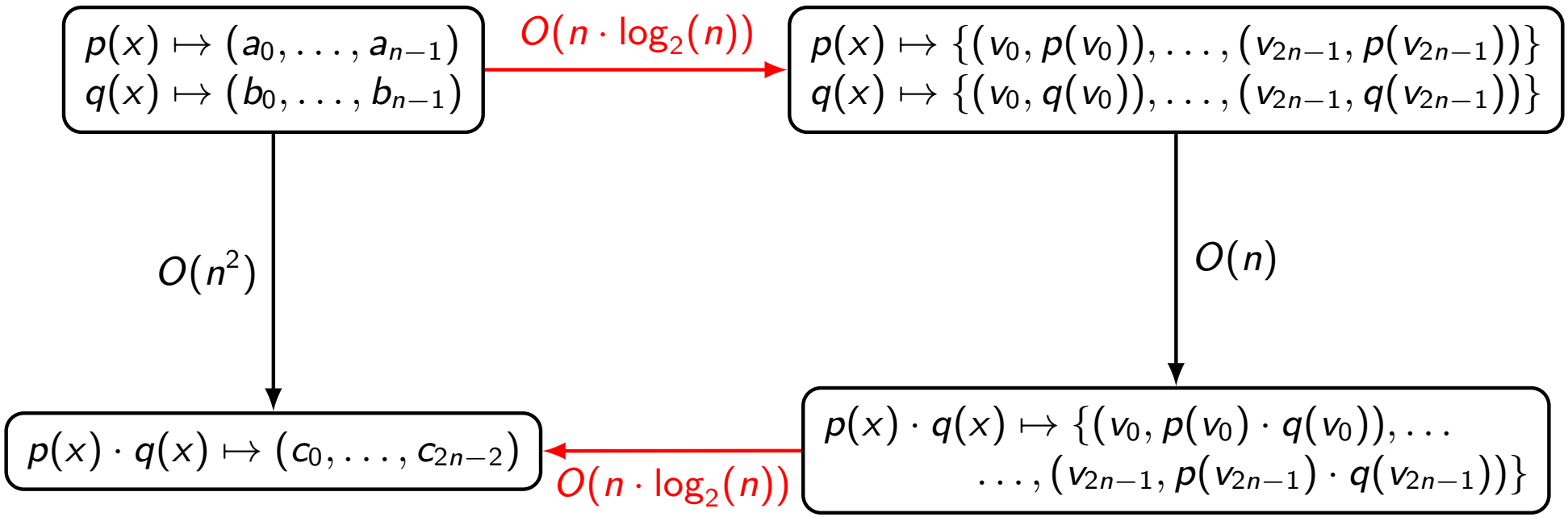
Ejercicio

Dado un polinomio $p(x)$ representando por el conjunto de punto-valores $\{(v_0, p(v_0)), \ldots, (v_{2n-1}, p(v_{2n-1}))\}$, muestre que la fórmula de Lagrange permite construir la forma canónica de $p(x)$ en tiempo $O(n^2)$

Todavía no tenemos un algoritmo más rápido para multiplicar polinomios



La solución: la transformada rápida de Fourier



La solución: la transformada rápida de Fourier

La transformada rápida de Fourier nos va a permitir entonces calcular la multiplicación de dos polinomios de grado $n-1$ en tiempo $O(n \cdot \log_2(n))$

- La idea clave es cómo elegir los puntos $v_0, \ldots, v_{2n-1}$ cuando se calcula la representación como punto-valores de un polinomio de grado $n-1$

Los números complejos y las raíces de la unidad juegan un papel fundamental en la definición de la transformada rápida de Fourier.

La fórmula de Euler

Teorema

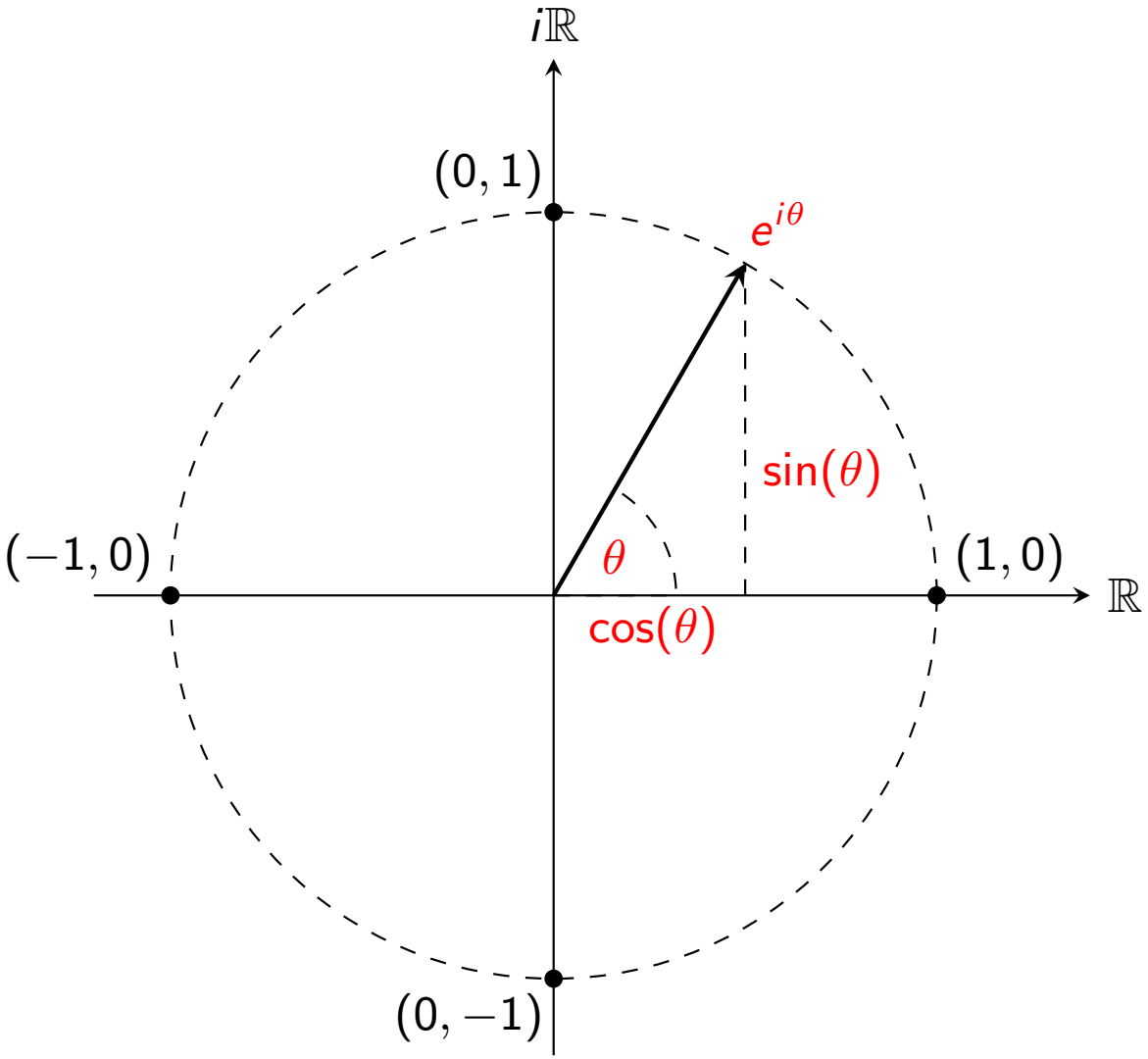
Para todo número real x:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Podemos representar entonces a $e^{i\theta}$ como un vector $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ en el plano complejo.

- $e^{i\theta}$ es un vector unitario: $||e^{i\theta}|| = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

La fórmula de Euler: interpretación geométrica



La fórmula de Euler: las raíces de la unidad

Dado $n \geq 1$, queremos encontrar las n raíces del polinomio $p(x) = x^n - 1$

- Sabemos que este polinomio tiene n raíces en los números complejos
- Llamamos a estos elementos las n-raíces de la unidad

El componente básico para definir las n-raíces de la unidad:

$$\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

La fórmula de Euler: las raíces de la unidad

Las n-raíces de la unidad son ω_n^0, ω_n^1, ω_n^2, $\ldots$, ω_n^{n-1}

Si $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\omega_n^k)^n &= ((e^{\frac{2\pi i}{n}})^k)^n \\
&= ((e^{\frac{2\pi i}{n}})^n)^k \\
&= (e^{2\pi i})^k \\
&= (\cos(2\pi) + i\sin(2\pi))^k \\
&= 1^k \\
&= 1
\end{aligned}$$

La fórmula de Euler: las raíces de la unidad

Además, si $0 \leq k \leq \ell \leq n-1$, entonces:

$$
\begin{aligned}
\omega_n^k = \omega_n^\ell \quad &\Rightarrow \quad (e^{\frac{2\pi i}{n}})^k = (e^{\frac{2\pi i}{n}})^\ell \\
&\Rightarrow \quad (e^{\frac{2\pi i}{n}})^{\ell-k} = 1 \\
&\Rightarrow \quad (e^{\frac{2\pi(\ell-k)i}{n}}) = 1 \\
&\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{2\pi(\ell-k)}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi(\ell-k)}{n}\right) = 1 \\
&\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{2\pi(\ell-k)}{n}\right) = 1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{\ell-k}{n} = 0 \qquad \text{puesto que } 0 \leq \frac{\ell-k}{n} \leq \frac{n-1}{n} \\
&\Rightarrow \quad \ell = k
\end{aligned}
$$

Por lo tanto: $\omega_n^0, \ldots, \omega_n^{n-1}$ son elementos distintos

Raíces de la unidad: ejemplos

¿Cuáles son las raíces del polinomio $x^4 - 1$?

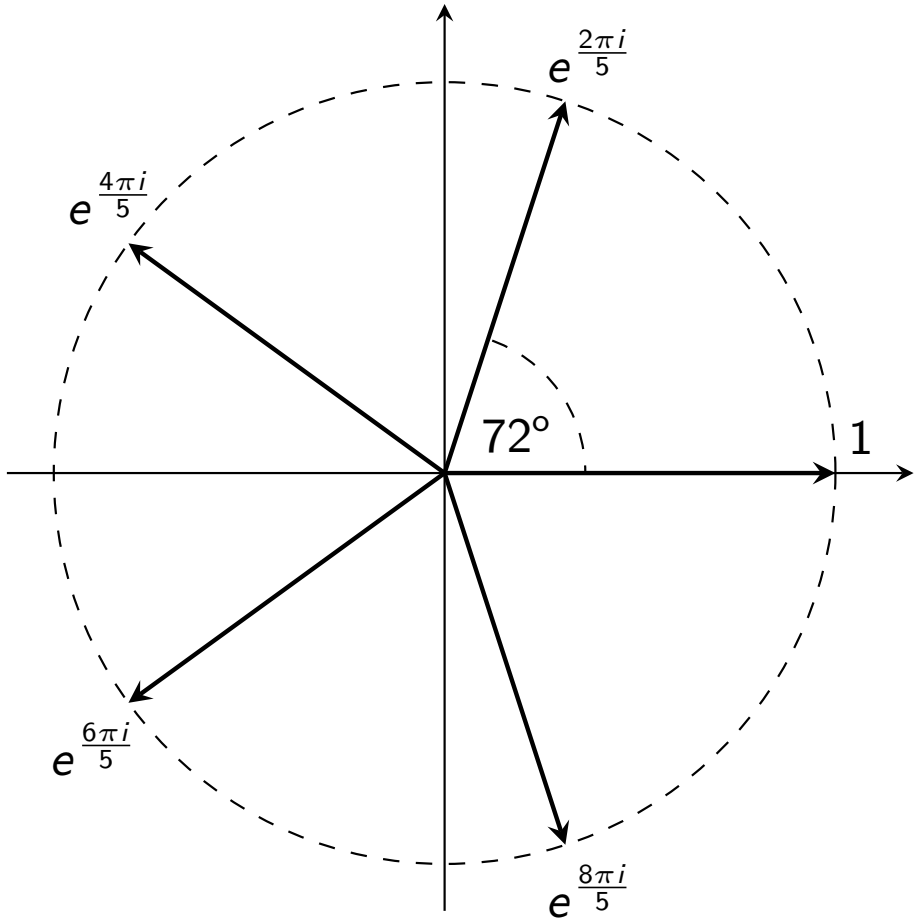
- Considerando $\omega_4 = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi}{2} i}$, tenemos que las 4-raíces de la unidad son:

$$
\begin{aligned}
\omega_4^0 &= 1 \\
\omega_4^1 &= e^{\frac{\pi}{2} i} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2}) = i \\
\omega_4^2 &= (e^{\frac{\pi}{2} i})^2 = e^{\pi i} = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 \\
\omega_4^3 &= (e^{\frac{\pi}{2} i})^3 = e^{\frac{3\pi}{2} i} = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i \sin(\frac{3\pi}{2}) = -i
\end{aligned}
$$

Raíces de la unidad: otro ejemplo

¿Cuáles son las raíces del polinomio $x^5 - 1$? Considerando $\omega_5 = e^{\frac{2\pi i}{5}}$, tenemos que las 5-raíces de la unidad son 1, $e^{\frac{2\pi i}{5}}$, $e^{\frac{4\pi i}{5}}$, $e^{\frac{6\pi i}{5}}$ y $e^{\frac{8\pi i}{5}}$

Representación geométrica:



La transformada discreta de Fourier

Dado: $n \geq 2$ y un polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

Definition

La transformada discreta de Fourier (DFT) de $p(x)$ se define como:

$$[p(\omega_n^0), p(\omega_n^1), \ldots, p(\omega_n^{n-1})]$$

¿Cómo podemos calcular DFT de manera eficiente?

Representamos $p(x)$ a través del vector $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$

El problema a resolver es calcular de manera eficiente la transformada discreta de Fourier de $p(x)$, la cual denotamos como **DFT**$(\bar{a})$

- Definimos $y_k = p(\omega_n^k)$ para cada $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, de manera tal que queremos calcular **DFT**$(\bar{a}) = [y_0, \ldots, y_{n-1}]$

Ejercicio

Muestre que **DFT**$(\bar{a})$ puede ser calculada en tiempo $O(n^2)$

¿Cómo podemos calcular DFT de manera eficiente?

Suponiendo que n potencia de 2, calculamos $\mathbf{DFT}(\bar{a})$ realizando los siguientes pasos:

(1) Calcular $\mathbf{DFT}(\bar{a}_0)$ y $\mathbf{DFT}(\bar{a}_1)$ para dos vectores $\bar{a}_0$ y $\bar{a}_1$ de largo $\frac{n}{2}$

(2) Combinar $\mathbf{DFT}(\bar{a}_0)$ y $\mathbf{DFT}(\bar{a}_1)$ para obtener $\mathbf{DFT}(\bar{a})$

Es fundamental que el paso (2) sea realizado en tiempo $O(n)$

Ejercicio

Muestre que si el paso (2) es realizado en $c \cdot n$ operaciones, entonces $\mathbf{DFT}(\bar{a})$ puede ser calculada en tiempo $O(n \cdot \log_2(n))$

La descomposición recursiva

Tenemos que:

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i}\ x^{2i} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i+1}\ x^{2i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i}\ x^{2i} + x \cdot \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i+1}\ x^{2i} \end{aligned}$$

Definimos los polinomios:

$$\begin{aligned} q(z) &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i}\ z^i \\ r(z) &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} a_{2i+1}\ z^i \end{aligned}$$

La descomposición recursiva

Tenemos entonces que $p(x) = q(x^2) + x \cdot r(x^2)$

Para calcular $[p(\omega_n^0), p(\omega_n^1), \ldots, p(\omega_n^{n-1})]$, tenemos entonces que calcular:

$$[q((\omega_n^0)^2), q((\omega_n^1)^2), \ldots, q((\omega_n^{n-1})^2)]$$
$$[r((\omega_n^0)^2), r((\omega_n^1)^2), \ldots, r((\omega_n^{n-1})^2)]$$

Pero si $k \in \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\omega_n^{\frac{n}{2}+k})^2 &= \omega_n^{n+2k} \\
&= \omega_n^n \cdot \omega_n^{2k} \\
&= (e^{\frac{2\pi i}{n}})^n \cdot (\omega_n^k)^2 \\
&= (e^{2\pi i}) \cdot (\omega_n^k)^2 \\
&= 1 \cdot (\omega_n^k)^2 \\
&= (\omega_n^k)^2
\end{aligned}$$

La descomposición recursiva

Por lo tanto para calcular $[p(\omega_n^0), p(\omega_n^1), \ldots, p(\omega_n^{n-1})]$, basta con calcular:

$$[q((\omega_n^0)^2), q((\omega_n^1)^2), \ldots, q((\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2)]$$
$$[r((\omega_n^0)^2), r((\omega_n^1)^2), \ldots, r((\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2)]$$

La pregunta clave: ¿si ω_n^0, ω_n^1, ..., ω_n^{n-1} son las n-raíces de la unidad, quiénes son $(\omega_n^0)^2$, $(\omega_n^1)^2$, ..., $(\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2$?

- Dado que q y r son polinomios de grado $\frac{n}{2} - 1$, ¿quiénes deberían ser $(\omega_n^0)^2$, $(\omega_n^1)^2$, ..., $(\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2$ para poder realizar las llamadas recursivas a **DFT**?

Respondiendo la pregunta: una regla de simplificación

Tenemos que $\omega_{n\cdot\ell}^{k\cdot\ell} = \omega_n^k$ para $\ell > 0$, puesto que:

$$\begin{aligned}
\omega_{n\cdot\ell}^{k\cdot\ell} &= (e^{\frac{2\pi i}{n\cdot\ell}})^{k\cdot\ell} \\
&= (e^{\frac{2\pi i\cdot\ell}{n\cdot\ell}})^{k} \\
&= (e^{\frac{2\pi i}{n}})^{k} \\
&= \omega_n^k
\end{aligned}$$

La respuesta a la pregunta

Lema

Si $n \geq 2$ es par, entonces $(\omega_n^0)^2$, $(\omega_n^1)^2$, ..., $(\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2$ son las $\frac{n}{2}$-raíces de la unidad (vale decir, son la raíces el polinomio $x^{\frac{n}{2}} - 1$).

Demostración: dado $k \in \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} (\omega_n^k)^2 &= \omega_n^{k \cdot 2} \\ &= \omega_{\frac{n}{2} \cdot 2}^{k \cdot 2} \\ &= \omega_{\frac{n}{2}}^{k} \qquad \text{por la regla de simplificación} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\omega_n^0)^2$, $(\omega_n^1)^2$, ..., $(\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2$ son las $\frac{n}{2}$-raíces de la unidad

- Puesto que $(\omega_n^0)^2$, $(\omega_n^1)^2$, ..., $(\omega_n^{\frac{n}{2}-1})^2 = \omega_{\frac{n}{2}}^0, \omega_{\frac{n}{2}}^1, \ldots, \omega_{\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}-1}$ □

La descomposición recursiva (continuación)

Recuerde que $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$, y defina:

$$\begin{aligned} \bar{a}_0 &= (a_0, a_2, \ldots, a_{n-2}) \\ \bar{a}_1 &= (a_1, a_3, \ldots, a_{n-1}) \end{aligned}$$

De los resultados anteriores concluimos que para calcular $\mathbf{DFT}(\bar{a})$, primero tenemos que calcular $\mathbf{DFT}(\bar{a}_0)$ y $\mathbf{DFT}(\bar{a}_1)$

¿Cómo se construye $\mathbf{DFT}(\bar{a})$ a partir de $\mathbf{DFT}(\bar{a}_0)$ y $\mathbf{DFT}(\bar{a}_1)$?

Construyendo $\mathbf{DFT}(\bar{a})$ a partir de $\mathbf{DFT}(\bar{a}_0)$ y $\mathbf{DFT}(\bar{a}_1)$

Sea:

$$\begin{aligned} \mathbf{DFT}(\bar{a}_0) &= [y_{0,0}, y_{0,1}, \ldots, y_{0,\frac{n}{2}-1}] \\ \mathbf{DFT}(\bar{a}_1) &= [y_{1,0}, y_{1,1}, \ldots, y_{1,\frac{n}{2}-1}] \end{aligned}$$

Para $k \in \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} y_k &= p(\omega_n^k) \\ &= q((\omega_n^k)^2) + \omega_n^k \cdot r((\omega_n^k)^2) \\ &= q(\omega_{\frac{n}{2}}^k) + \omega_n^k \cdot r(\omega_{\frac{n}{2}}^k) \\ &= y_{0,k} + \omega_n^k \cdot y_{1,k} \end{aligned}$$

Construyendo $\mathbf{DFT}(\bar{a})$ a partir de $\mathbf{DFT}(\bar{a}_0)$ y $\mathbf{DFT}(\bar{a}_1)$

Además, para $k \in \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
y_{\frac{n}{2}+k} &= p(\omega_n^{\frac{n}{2}+k}) \\
&= q((\omega_n^{\frac{n}{2}+k})^2) + \omega_n^{\frac{n}{2}+k} \cdot r((\omega_n^{\frac{n}{2}+k})^2) \\
&= q(\omega_n^{n+2k}) + \omega_n^{\frac{n}{2}} \cdot \omega_n^k \cdot r(\omega_n^{n+2k}) \\
&= q(\omega_n^n \cdot \omega_n^{2k}) + (e^{\frac{2\pi i}{n}})^{\frac{n}{2}} \cdot \omega_n^k \cdot r(\omega_n^n \cdot \omega_n^{2k}) \\
&= q(1 \cdot \omega_n^{2k}) + e^{\pi i} \cdot \omega_n^k \cdot r(1 \cdot \omega_n^{2k}) \\
&= q(\omega_n^{2k}) - \omega_n^k \cdot r(\omega_n^{2k}) \\
&= q(\omega_{\frac{n}{2}}^k) - \omega_n^k \cdot r(\omega_{\frac{n}{2}}^k) \\
&= y_{0,k} - \omega_n^k \cdot y_{1,k}
\end{aligned}
$$

Construyendo **DFT**$(\bar{a})$ a partir de **DFT**$(\bar{a}_0)$ y **DFT**$(\bar{a}_1)$

Resumiendo, para $k \in \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} y_k &= y_{0,k} + \omega_n^k \cdot y_{1,k} \\ y_{\frac{n}{2}+k} &= y_{0,k} - \omega_n^k \cdot y_{1,k} \end{aligned}$$

Para tener un algoritmo recursivo para calcular **DFT** sólo nos falta el caso base.

- Consideramos $n = 2$ y un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x$

Construyendo $\mathbf{DFT}(\bar{a})$ a partir de $\mathbf{DFT}(\bar{a}_0)$ y $\mathbf{DFT}(\bar{a}_1)$

Tenemos que $\omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{2}} = e^{\pi i} = -1$

- Por lo tanto: $\omega_2^0 = 1$ y $\omega_2^1 = -1$

Concluimos que:

$$\begin{aligned} p(\omega_1^0) &= a_0 + a_1 \\ p(\omega_1^1) &= a_0 - a_1 \end{aligned}$$

Un algoritmo recursivo eficiente para **DFT**

La entrada del algoritmo es un polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$

- Este polinomio es representado por el vector $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$

Suponemos además que $n \geq 2$ y n es una potencia de 2

El algoritmo es llamado la transformada rápida de Fourier (FFT)

- Fue propuesto por Cooley & Tukey

Un algoritmo recursivo eficiente para **DFT**

FFT$(\bar{a})$

$(a_0, \ldots, a_{n-1}) := \bar{a}$

if $n = 2$ **then**

$y_0 = a_0 + a_1$

$y_1 = a_0 - a_1$

return $[y_0, y_1]$

else

$\bar{a}_0 := (a_0, \ldots, a_{n-2})$

$\bar{a}_1 := (a_1, \ldots, a_{n-1})$

$[y_{0,0}, \ldots, y_{0,\frac{n}{2}-1}] :=$ **FFT**$(\bar{a}_0)$

$[y_{1,0}, \ldots, y_{1,\frac{n}{2}-1}] :=$ **FFT**$(\bar{a}_1)$

$\omega_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$

$\alpha := 1$

for $k := 0$ **to** $\frac{n}{2} - 1$ **do**

$y_k := y_{0,k} + \alpha \cdot y_{1,k}$

$y_{\frac{n}{2}+k} := y_{0,k} - \alpha \cdot y_{1,k}$

$\alpha := \alpha \cdot \omega_n$

return $[y_0, \ldots, y_{n-1}]$

Algunos comentarios sobre **FFT**

Ejercicios

1. Demuestre que **FFT** funciona en tiempo $O(n \cdot \log_2(n))$, donde n es el grado del polinomio de entrada.

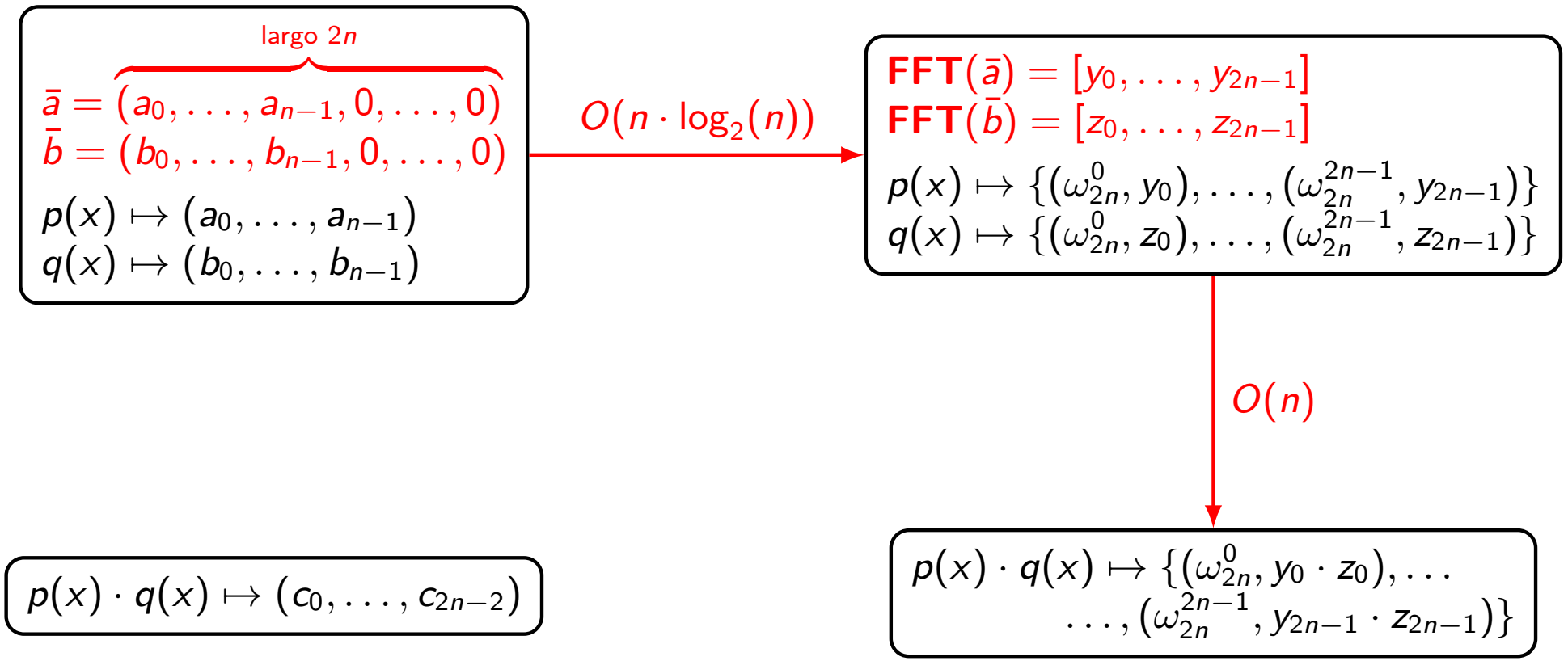
2. Sea $p(x)$ un polinomio representado como $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_{n-1})$, donde n **no** es una potencia de 2.

   Para evaluar $p(x)$ en n puntos haga lo siguiente:

   (i) Defina $\bar{b} = (a_0, \ldots, a_{n-1}, 0, \ldots, 0)$ de largo $m = 2^{\lceil \log_2(n) \rceil}$
   (ii) Calcule $\mathbf{FFT}(\bar{b}) = [y_0, \ldots, y_{m-1}]$, y retorne $[y_0, \ldots, y_{n-1}]$

   Note que este algoritmo retorna $[p(\omega_m^0), \ldots, p(\omega_m^{n-1})]$ en lugar de $\mathbf{DFT}(\bar{a})$, y demuestre que funciona en tiempo $O(n \cdot \log_2(n))$

La nueva situación con el algoritmo **FFT**



Todavía nos falta un algoritmo para calcular la inversa de la transformada discreta de Fourier.

La transformada discreta de Fourier como matriz

Suponga nuevamente que $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ con $n \geq 2$

- Para cada $k \in \{0, \ldots, n-1\}$: $y_k = p(\omega_n^k) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (\omega_n^k)^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \omega_n^{i \cdot k}$

La transformada discreta de Fourier puede ser representada entonces de la siguiente forma en notación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

La transformada discreta de Fourier como matriz

Definimos la matrix M_n como:

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \cdots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \cdots & \omega_n^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

Esta matriz va a ser muy útil al momento de definir la inversa de la transformada discreta de Fourier.

Las matrices M_n y M_n^*

Para cada $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que $M_n[i,j] = (\omega_n^{i-1})^{j-1} = \omega_n^{(i-1)\cdot(j-1)}$

- Por lo tanto $M_n[i,j] = M_n[j,i]$, de lo cual se deduce que M_n es una matriz simétrica

Recuerde que la matriz adjunta A^* de una matriz A se define como $A^*[i,j] = \overline{A[j,i]}$

- Donde $\overline{b + ci} = b - ci$ es el conjugado del número complejo $b + ci$

Para calcular M_n^* necesitamos calcular el conjugado de ω_n^k

El conjugado de ω_n^k

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\overline{(\omega_n^k)} &= \overline{(e^{\frac{2\pi i}{n}})^k} \\
&= \overline{e^{\frac{2\pi ki}{n}}} \\
&= \overline{\cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)} \\
&= \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\
&= \cos\left(-\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi k}{n}\right) \\
&= e^{\frac{-2\pi ki}{n}} \\
&= (e^{\frac{2\pi i}{n}})^{-k} \\
&= \omega_n^{-k}
\end{aligned}
$$

Las matrices M_n y M_n^* (continuación)

Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} M_n^*[i,j] &= \overline{M_n[j,i]} \\ &= \overline{(\omega_n^{j-1})^{i-1}} \\ &= \overline{\omega_n^{(i-1)\cdot(j-1)}} \\ &= \omega_n^{-(i-1)\cdot(j-1)} \end{aligned}$$

Vamos a utilizar esta propiedad para calcular $M_n^* \cdot M_n$

Las matrices M_n y M_n^* (continuación)

Lema

Sea I_n la matriz identidad de tamaño n. Entonces $M_n^* \cdot M_n = n \cdot I_n$

Demostración: Sea $A = M_n^* \cdot M_n$

Para $i \in \{1, \ldots, n\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} A[i,i] &= \sum_{k=1}^{n} M_n^*[i,k] \cdot M_n[k,i] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \omega_n^{-(i-1)\cdot(k-1)} \cdot \omega_n^{(k-1)\cdot(i-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= n \end{aligned}$$

Las matrices M_n y M_n^* (continuación)

Para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ con $i \neq j$, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
A[i,j] &= \sum_{k=1}^{n} M_n^*[i,k] \cdot M_n[k,j] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \omega_n^{-(i-1)\cdot(k-1)} \cdot \omega_n^{(k-1)\cdot(j-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\omega_n^{-(i-1)+(j-1)})^{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\omega_n^{j-i})^{k-1} \\
&= \frac{(\omega_n^{j-i})^n - 1}{\omega_n^{j-i} - 1} \qquad \text{ya que } \omega_n^{j-i} \neq 1 \ (j-i \neq 0,\ j-i \neq n \text{ y } j-i \neq -n) \\
&= \frac{(\omega_n^n)^{j-i} - 1}{\omega_n^{j-i} - 1} = \frac{1^{j-i} - 1}{\omega_n^{j-i} - 1} = \frac{1-1}{\omega_n^{j-i} - 1} = 0
\end{aligned}
$$

□

M_n^* como una permutación de M_n

Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{2, \ldots, n\}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
M_n[i, n+2-j] &= \omega_n^{(i-1)\cdot(n+2-j-1)} \\
&= \omega_n^{(i-1)\cdot(n+1-j)} \\
&= \omega_n^{n\cdot(i-1)+(i-1)\cdot(1-j)} \\
&= \omega_n^{n\cdot(i-1)} \cdot \omega_n^{(i-1)\cdot(1-j)} \\
&= \left(\omega_n^n\right)^{i-1} \cdot \omega_n^{-(i-1)\cdot(j-1)} \\
&= 1^{i-1} \cdot \omega_n^{-(i-1)\cdot(j-1)} \\
&= \omega_n^{-(i-1)\cdot(j-1)} \\
&= M_n^*[i, j]
\end{aligned}$$

M_n^* como una permutación de M_n

Para $j \in \{2, \ldots, n\}$, concluimos que:

$$\begin{pmatrix} M_n^*[1,j] \\ M_n^*[2,j] \\ \vdots \\ M_n^*[n,j] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_n[1, n+2-j] \\ M_n[2, n+2-j] \\ \vdots \\ M_n[n, n+2-j] \end{pmatrix}$$

Vamos a usar esta propiedad para definir M_n^* como una permutación de M_n

M_n^* como una permutación de M_n

Considere la siguiente matriz de permutación de $n \times n$:

$$P_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De la propiedad en la transparencia anterior se concluye que:

$$M_n^* = M_n \cdot P_n$$

M_n^* como una permutación de M_n

Dado que $M_n^* = M_n \cdot P_n$, concluimos que:

$$(M_n^*)^T \quad = \quad (M_n \cdot P_n)^T,$$

donde A^T es la matriz traspuesta de A

Así, dado que M_n^*, M_n y P_n son matrices simétricas y $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$:

$$M_n^* \quad = \quad P_n \cdot M_n$$

Vale decir, podemos obtener M_n^* desde M_n permutando las filas o las columnas de M_n según lo definido por la matriz P_n

- Para el calculo de la inversa de la transformada discreta de Fourier vamos a utilizar la propiedad $M_n^* = M_n \cdot P_n$

Calculando la inversa de la transformada discreta de Fourier

Tenemos los ingredientes necesarios para calcular la inversa de la transformada discreta de Fourier.

- No necesitamos de un nuevo algoritmo para calcularla

Teorema

Sea $n \geq 2$, $\bar{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ *y* $\mathbf{DFT}(\bar{a}) = [y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}]$. *Si* $\bar{p} = (y_0, y_{n-1}, \ldots, y_1)$, *entonces:*

$$\frac{1}{n} \cdot \mathbf{DFT}(\bar{p}) \quad = \quad [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$$

La demostración del teorema

Tenemos que:

$$M_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$P_n \cdot M_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = P_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

La demostración del teorema

Concluimos que:

$$M_n \cdot P_n \cdot M_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = M_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Dado que $M_n \cdot P_n = M_n^*$, tenemos que:

$$M_n^* \cdot M_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = M_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

La demostración del teorema

Así, puesto que $M_n^* \cdot M_n = n \cdot I_n$, tenemos que:

$$n \cdot I_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = M_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

De lo cual concluimos que:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \cdot M_n \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix}$$

La demostración del teorema

Así, utilizando la notación matricial para la transformada discreta de Fourier concluimos que:

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] \quad = \quad \frac{1}{n} \cdot \mathbf{DFT}(\bar{p})$$

□

Multiplicando polinomios en tiempo $O(n \cdot \log n)$