



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERIA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Diseño y Análisis de Algoritmos - IIC2283

Interrogación 2

Tiempo: 2 horas

1. [1 punto] El siguiente es el código para el procedimiento **CalcularCodificaciónHuffman** analizado en clases:

CalcularCodificaciónHuffman(f)

Sea Σ el dominio de la función f

if $\Sigma = \{a, b\}$ **then return** $\{(a, 0), (b, 1)\}$

else

Sean $a, b \in \Sigma$ tales que $a \neq b$, $f(a) \leq f(b)$ y

$f(b) \leq f(e)$ para todo $e \in (\Sigma \setminus \{a, b\})$

Sea c un símbolo que **no** aparece en Σ

$g := (f \setminus \{(a, f(a)), (b, f(b))\}) \cup \{(c, f(a) + f(b))\}$

$\tau^* := \text{CalcularCodificaciónHuffman}(g)$

$w := \tau^*(c)$

$\tau := (\tau^* \setminus \{(c, w)\}) \cup \{(a, w0), (b, w1)\}$

return τ

Demuestre que si f es una función de frecuencias relativas, Σ es el dominio de f , con $|\Sigma| \geq 2$, y $\tau = \text{CalcularCodificaciónHuffman}(f)$, entonces τ es una Σ -codificación libre de prefijos que minimiza la función $\text{lp}_f(x)$.¹

2. Dada una lista L de números enteros sin repeticiones y con una cantidad impar k de elementos, la mediana de L es definida como un elemento a en L tal que:

$$|\{b \mid b \text{ es un elemento de } L \text{ y } b < a\}| = |\{c \mid c \text{ es un elemento de } L \text{ y } c > a\}| = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$$

En esta pregunta usted debe considerar el problema de determinar la mediana de la concatenación de dos listas L_1 y L_2 de números enteros, las cuales satisfacen las siguientes condiciones:

(i) L_1 tiene n elementos y L_2 tiene $n+1$ elementos, donde $n \geq 1$, (ii) L_1 y L_2 están ordenadas de manera creciente, (iii) L_1 y L_2 no tienen elementos repetidos, y (iv) no hay elementos en común entre L_1 y L_2 . Por ejemplo, las listas $L_1 = [-3, 7, 11, 17]$ y $L_2 = [-5, 0, 5, 6, 13]$

¹Recuerde que $\text{lp}_f(\tau) = \sum_{a \in \Sigma} f(a) \cdot |\tau(a)|$

satisfacen las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) considerando $n = 4$. Además, se tiene que 6 es la mediana de la lista $[-3, 7, 11, 17, -5, 0, 5, 6, 13]$ que resulta de la concatenación de L_1 con L_2 , puesto que los elementos $-5, -3, 0, 5$ son menores que 6 y los elementos $7, 11, 13, 17$ son mayores que 6.

Responda las siguientes preguntas considerando el problema definido en el párrafo anterior.

- (a) [1 punto] Encuentre una función $f(n)$ tal que cualquier algoritmo que solucione el problema y esté basado en comparaciones sea en el peor caso $\Omega(f(n))$. En la construcción de esta cota inferior recuerde que la entrada del algoritmo son dos listas L_1 y L_2 que satisfacen las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv); en particular, la lista L_1 tiene n elementos.
 - (b) [1 punto] Usando la técnica de dividir para conquistar, construya un algoritmo basado en comparaciones que resuelva el problema y que en el peor caso sea $O(f(n))$, donde $f(n)$ es la función determinada en (a).
3. [1.5 puntos] Dada una palabra w , defina $\text{MinSacarPal}(w)$ como el menor número de símbolos de w que tienen que ser eliminados para construir un palíndromo. Por ejemplo, si $w_1 = abba$ y $w_2 = abbca$, entonces $\text{MinSacarPal}(w_1) = 0$ ya que w_1 es un palíndromo, y $\text{MinSacarPal}(w_2) = 1$ ya que al sacar el símbolo c desde w_2 se obtiene el palíndromo $abba$.

Utilizando la técnica de programación dinámica construya un algoritmo que, dada una palabra w , calcule $\text{MinSacarPal}(w)$. Analice la complejidad de su algoritmo y muestre que funciona en tiempo $O(|w|^k)$ para alguna constante k .

4. [1.5 puntos] Dado un grafo no dirigido $G = (N, A)$, decimos que $S \subseteq N$ es un conjunto independiente de G si para cada $a, b \in S$ tal que $a \neq b$, se tiene que $(a, b) \notin A$. Además, decimos que S es un conjunto independiente máximo de G si S es conjunto independiente de G y para cada conjunto independiente S' de G se tiene que $|S'| \leq |S|$.

Considere el siguiente algoritmo codicioso que, dado un grafo no dirigido $G = (N, A)$ con $N = \{1, \dots, n\}$ y $n \geq 1$, construye un conjunto independiente máximo S de G .

```

for  $i := 1$  to  $n$  do
     $g_i := |\{j \in N \mid (i, j) \in A\}|$ 
 $L := [(1, g_1), \dots, (n, g_n)]$ 
Ordene  $L$  de menor a mayor según los valores  $g_1, \dots, g_n$ 
 $S := \emptyset$ 
for  $i := 1$  to  $n$  do
    Sea  $(j, g_j)$  es  $i$ -ésimo par en  $L$ 
    if  $j$  no está conectado con un elemento de  $S$ 
        then  $S := S \cup \{j\}$ 
return  $S$ 

```

En esta pregunta usted debe demostrar que este algoritmo efectivamente construye un conjunto independiente máximo S de G , o dar un contraejemplo que muestre que el algoritmo es incorrecto (nótese que el algoritmo construye un conjunto independiente de G).