Técnicas básicas de diseño de algoritmos

IIC2283

Técnicas de diseño de algoritmos

En este capítulo vamos a estudiar tres técnicas básicas para el diseño de algoritmos:

- Dividir para conquistar
- Programación dinámica
- Algoritmos codiciosos

Estas tres técnicas son útiles para desarrollar algoritmos en muchos escenarios.

Dividir para conquistar

Esta es la forma genérica de una algoritmo que utiliza la técnica de dividir para conquistar:

DividirParaConquistar(w)
    if $|w| \leq k$ **then return InstanciasPequeñas**(w)
    else
        Dividir w en $w_1, \ldots, w_\ell$
        for $i := 1$ **to** ℓ **do**
            $S_i :=$ **DividirParaConquistar**(w_i)
        return Combinar($S_1, \ldots, S_\ell$)

Dividir para conquistar

- En **DividirParaConquistar** k es un constante que indica cuando el tamaño de una entrada w es considerado pequeño: $|w| \leq k$
- Las entradas pequeñas son solucionas utilizado un algoritmo diseñado para ellas: **InstanciasPequeñas**
  - En general este algoritmo es sencillo y ejecuta un número pequeño de operaciones
- Si el tamaño de una entrada w no es pequeño ($|w| > k$), entonces w es dividido es una secuencia $w_1, \ldots, w_\ell$ de entradas de menor tamaño para **DividirParaConquistar**

Dividir para conquistar

- Para cada $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ la llamada **DividirParaConquistar**(w_i) resuelve el problema para la entrada w_i
  - El resultado de esta llamada es almacenado en S_i

- Finalmente la llamada **Combinar**$(S_1, \ldots, S_\ell)$ combina los resultados $S_1, \ldots, S_\ell$ para obtener el resultados para w

Hemos visto varios ejemplos de esta técnica: algoritmo de multiplicación de Karatsuba, búsqueda binaria y Quicksort

- Vamos a ver como utilizar esta técnica para obtener un algoritmo eficiente para la multiplicación de matrices cuadradas

Multiplicación de matrices cuadradas

Sean $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$ dos matrices de números enteros.

Queremos construir un algoritmo para calcular $A \cdot B$

- Medimos la complejidad del algoritmo en términos del número de sumas y multiplicaciones de números enteros, a las cuales asignamos costo 1

Ejercicio

Muestre que el algoritmo usual para multiplicar matrices cuadradas en el peor caso es $\Theta(n^3)$

Un cota inferior para la multiplicación de matrices

Sea $\mathcal{A}$ un algoritmo para calcular la multiplicación de matrices cuadradas de números enteros, y cuyas operaciones básicas son la suma y la multiplicación de números enteros.

Proposición

$\mathcal{A}$ debe realizar al menos n^2 sumas y multiplicaciones de números enteros para calcular la multiplicación de dos matrices de $n \times n$

Ejercicio

Demuestre la proposición utilizando la técnica basada en la mejor estrategia del adversario.

Un algoritmo de multiplicación más rápido

Tenemos n^2 como una cota inferior para el número operaciones básicas necesarias para obtener la multiplicación de dos matrices $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$

- Y tenemos un algoritmo para este problema que en el peor caso es $\Theta(n^3)$

¡Hay mucho espacio para mejorar!

- ¿Es posible tener un algoritmo para multiplicar matrices cuadradas que realice $f(n)$ operaciones básicas, donde $f(n) \in o(n^3)$?

En las siguientes transparencias vamos a dar una respuesta positiva a esta pregunta: el algoritmo de Strassen

El algoritmo de multiplicación de Strassen

Sean $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$ dos matrices de números enteros

- Suponemos inicialmente que n es una potencia de 2

Dividimos A y B de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$$

donde $A_{i,j}$ y $B_{i,j}$ ($i = 1, 2$ y $j = 1, 2$) son matrices de $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

El algoritmo de multiplicación de Strassen

Dividimos $C = A \cdot B$ de la misma forma:

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{pmatrix}$$

donde $C_{i,j}$ ($i = 1, 2$ y $j = 1, 2$) es una matriz de $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

Tenemos entonces que:

$$\begin{array}{lcllcl} C_{1,1} & = & A_{1,1} \cdot B_{1,1} + A_{1,2} \cdot B_{2,1} & C_{2,1} & = & A_{2,1} \cdot B_{1,1} + A_{2,2} \cdot B_{2,1} \\ C_{1,2} & = & A_{1,1} \cdot B_{1,2} + A_{1,2} \cdot B_{2,2} & C_{2,2} & = & A_{2,1} \cdot B_{1,2} + A_{2,2} \cdot B_{2,2} \end{array}$$

El cálculo directo de C requiere de 8 multiplicaciones de matrices de $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

- La idea clave del algoritmo de Strassen es bajar este número a 7

El algoritmo de multiplicación de Strassen

El algoritmo de Strassen calcula las siguientes multiplicaciones:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= (A_{1,1} + A_{2,2}) \cdot (B_{1,1} + B_{2,2}) \\
D_2 &= (A_{2,1} + A_{2,2}) \cdot B_{1,1} \\
D_3 &= A_{1,1} \cdot (B_{1,2} - B_{2,2}) \\
D_4 &= A_{2,2} \cdot (B_{2,1} - B_{1,1}) \\
D_5 &= (A_{1,1} + A_{1,2}) \cdot B_{2,2} \\
D_6 &= (A_{2,1} - A_{1,1}) \cdot (B_{1,1} + B_{1,2}) \\
D_7 &= (A_{1,2} - A_{2,2}) \cdot (B_{2,1} + B_{2,2})
\end{aligned}
$$

El algoritmo de multiplicación de Strassen

Con estas multiplicaciones podemos calcular las matrices que forman C:

$$
\begin{aligned}
&D_1 + D_4 - D_5 + D_7 \\
&= (A_{1,1} + A_{2,2}) \cdot (B_{1,1} + B_{2,2}) + A_{2,2} \cdot (B_{2,1} - B_{1,1}) - \\
&\quad (A_{1,1} + A_{1,2}) \cdot B_{2,2} + (A_{1,2} - A_{2,2}) \cdot (B_{2,1} + B_{2,2}) \\
&= A_{1,1} \cdot B_{1,1} + A_{1,1} \cdot B_{2,2} + A_{2,2} \cdot B_{1,1} + A_{2,2} \cdot B_{2,2} + A_{2,2} \cdot B_{2,1} - A_{2,2} \cdot B_{1,1} - \\
&\quad A_{1,1} \cdot B_{2,2} - A_{1,2} \cdot B_{2,2} + A_{1,2} \cdot B_{2,1} + A_{1,2} \cdot B_{2,2} - A_{2,2} \cdot B_{2,1} - A_{2,2} \cdot B_{2,2} \\
&= A_{1,1} \cdot B_{1,1} + A_{1,2} \cdot B_{2,1} \\
&= C_{1,1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&D_3 + D_5 \\
&= A_{1,1} \cdot (B_{1,2} - B_{2,2}) + (A_{1,1} + A_{1,2}) \cdot B_{2,2} \\
&= A_{1,1} \cdot B_{1,2} - A_{1,1} \cdot B_{2,2} + A_{1,1} \cdot B_{2,2} + A_{1,2} \cdot B_{2,2} \\
&= A_{1,1} \cdot B_{1,2} + A_{1,2} \cdot B_{2,2} \\
&= C_{1,2}
\end{aligned}
$$

El algoritmo de multiplicación de Strassen

$$
\begin{aligned}
& D_2 + D_4 \\
&= (A_{2,1} + A_{2,2}) \cdot B_{1,1} + A_{2,2} \cdot (B_{2,1} - B_{1,1}) \\
&= A_{2,1} \cdot B_{1,1} + A_{2,2} \cdot B_{1,1} + A_{2,2} \cdot B_{2,1} - A_{2,2} \cdot B_{1,1} \\
&= A_{2,1} \cdot B_{1,1} + A_{2,2} \cdot B_{2,1} \\
&= C_{2,1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& D_1 - D_2 + D_3 + D_6 \\
&= (A_{1,1} + A_{2,2}) \cdot (B_{1,1} + B_{2,2}) - (A_{2,1} + A_{2,2}) \cdot B_{1,1} + \\
&\quad A_{1,1} \cdot (B_{1,2} - B_{2,2}) + (A_{2,1} - A_{1,1}) \cdot (B_{1,1} + B_{1,2}) \\
&= A_{1,1} \cdot B_{1,1} + A_{1,1} \cdot B_{2,2} + A_{2,2} \cdot B_{1,1} + A_{2,2} \cdot B_{2,2} - A_{2,1} \cdot B_{1,1} - A_{2,2} \cdot B_{1,1} + \\
&\quad A_{1,1} \cdot B_{1,2} - A_{1,1} \cdot B_{2,2} + A_{2,1} \cdot B_{1,1} + A_{2,1} \cdot B_{1,2} - A_{1,1} \cdot B_{1,1} - A_{1,1} \cdot B_{1,2} \\
&= A_{2,1} \cdot B_{1,2} + A_{2,2} \cdot B_{2,2} \\
&= C_{2,2}
\end{aligned}
$$

La complejidad del algoritmo de Strassen

¿Cuál es el peor caso para el algoritmo de Strassen?

- El algoritmo realiza la misma cantidad de sumas y multiplicaciones de números enteros para todas las matrices de entrada de $n \times n$

Sea $T(n)$ es número de sumas y multiplicaciones de números enteros realizadas por el algoritmo de Strassen con matrices de entradas de $n \times n$

Tenemos que:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 7 \cdot T(\frac{n}{2}) + c \cdot n^2 & n > 1 \end{cases}$$

donde $c \in \mathbb{R}^+$. ¿Por qué?

La complejidad del algoritmo de Strassen

La ecuación de recurrencia anterior sólo fue definida para n potencia de 2, pero podemos extenderla para considerar cualquier valor de n:

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 7 \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c \cdot n^2 & n > 1 \end{cases}$$

Dado que $\log_2(7) > 2.8$, tenemos que $c \cdot n^2 \in O(n^{\log_2(7)-0.5})$, por lo que usando el Teorema Maestro obtenemos que $T(n) \in \Theta(n^{\log_2(7)})$

En particular concluimos que existe $d \in \mathbb{R}^+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \geq n_0$ que sea potencia de 2 se tiene que $T(n) \leq d \cdot n^{\log_2(7)}$

La complejidad del algoritmo de Strassen

Tenemos entonces un algoritmo para multiplicar matrices cuadradas que funciona más rápido que el algoritmo usual.

¿Pero como usamos este algoritmo cuando n no es potencia de 2?

- Vamos a responder esta pregunta en las siguientes transparencias

Extendiendo el algoritmo de Strassen

Sean $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$ dos matrices de números enteros donde n puede no ser una potencia de 2

- Tenemos que $2^k \leq n < 2^{k+1}$ para $k \geq 1$

Si $2^k = n$ calculamos $A \cdot B$ con el algoritmo de Strassen. Si $2^k < n$, entonces a partir de A y B definimos matrices $D_{2^{k+1}\times 2^{k+1}}$ y $E_{2^{k+1}\times 2^{k+1}}$ como sigue:

$$D[i,j] = \begin{cases} A[i,j] & 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq n \\ 0 & n+1 \leq i \leq 2^k \text{ o } n+1 \leq j \leq 2^{k+1} \end{cases}$$

$$E[i,j] = \begin{cases} B[i,j] & 1 \leq i \leq n \text{ y } 1 \leq j \leq n \\ 0 & n+1 \leq i \leq 2^k \text{ o } n+1 \leq j \leq 2^{k+1} \end{cases}$$

Extendiendo el algoritmo de Strassen

Utilizando el algoritmo de Strassen calculamos $F = D \cdot E$, y a partir de F definimos $C_{n \times n}$ como $C[i,j] = F[i,j]$ para $i,j \in \{1,\ldots,n\}$

Puesto que $C = A \cdot B$ tenemos un algoritmo general para calcular la multiplicación de matrices cuadradas.

Ejercicio

Demuestre que el algoritmo extendido de Strassen en el peor caso es $O(n^{\log_2(7)})$ considerando como operaciones básicas la suma y multiplicación de enteros.

- ¿Hay un peor caso para este algoritmo?
- ¿Qué sucede si incluye en el tiempo de ejecución la construcción de las matrices C y D? ¿Cambia el orden del algoritmo?

Multiplicación de matrices simétricas

La traspuesta de una matriz $A_{n\times n}$ es definida como una matriz $A^T_{n\times n}$ tal que $A^T[i,j] = A[j,i]$ para cada $i,j \in \{1,\ldots,n\}$

Además, una matriz A es simétrica si $A = A^T$

Como en las matrices simétricas hay elementos repetidos, es natural preguntar si la multiplicación de dos matrices simétricas puede hacerse más rápido.

- ¿Es el resultado de la multiplicación de dos matrices simétricas una matriz simétrica?

Multiplicación de matrices simétricas

¿Es posible tener un algoritmo para multiplicar matrices simétricas que realice $f(n)$ sumas y multiplicaciones de números enteros, donde $f(n) \in o(n^2)$?

Usando la técnica de la mejor estrategia del adversario es posible dar una respuesta negativa a esta pregunta.

- La demostración sigue la misma idea que para el caso general de matrices cuadradas

Pero en este caso es posible utilizar la técnica de reducción para dar de manera más simple una respuesta negativa a la pregunta.

Una cota inferior para la multiplicación de matrices simétricas

Vamos a reducir el problema de multiplicar matrices cuadradas al problema de multiplicar matrices simétricas.

Sean $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$ dos matrices cuadradas (no necesariamente simétricas)

Vamos a mostrar cómo calcular $A \cdot B$ utilizando un algoritmo arbitrario $\mathcal{A}$ para la multiplicación de matrices simétricas.

Una cota inferior para la multiplicación de matrices simétricas

Defina las matrices $C_{2 \cdot n \times 2 \cdot n}$ y $D_{2 \cdot n \times 2 \cdot n}$ de la siguiente forma:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

donde 0 es una matriz de $n \times n$ que contiene el valor 0 en cada posición.

Las matrices C y D son simétricas.

Una cota inferior para la multiplicación de matrices simétricas

Tenemos que:

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} A \cdot B & 0 \\ 0 & A^T \cdot B^T \end{pmatrix}$$

Por lo tanto a partir de $C \cdot D$ podemos obtener $A \cdot B$

Recuerde que la multiplicación de dos matrices cuadradas de $n \times n$ requiere de al menos n^2 sumas y multiplicaciones de enteros.

Entonces, dado que el cálculo de la reducción no utiliza sumas ni multiplicaciones de números enteros, obtenemos que $n^2 \leq t_{\mathcal{A}}(2 \cdot n)$

- Puesto que C y D son matrices de $2 \cdot n \times 2 \cdot n$

Una cota inferior para la multiplicación de matrices simétricas

Si suponemos que $t_{\mathcal{A}}(n) \in o(n^2)$, entonces:

$$(\forall c \in \mathbb{R}_0^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(t_{\mathcal{A}}(n) \leq c \cdot n^2)$$

Tenemos entonces que:

$$(\forall c \in \mathbb{R}_0^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(t_{\mathcal{A}}(2 \cdot n) \leq 4 \cdot c \cdot n^2)$$

En particular si consideramos $c = \frac{1}{8}$ obtenemos que:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(t_{\mathcal{A}}(2 \cdot n) \leq \frac{1}{2} \cdot n^2)$$

Como tenemos que $n^2 \leq t_{\mathcal{A}}(2 \cdot n)$ concluimos que:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(n^2 \leq \frac{1}{2} \cdot n^2)$$

Lo cual nos lleva a una contradicción. □

Programación dinámica: un primer ingrediente

Al igual que dividir para conquistar, la técnica de programación dinámica resuelve un problema dividiéndolo en sub-problemas más pequeños.

Pero a diferencia de dividir para conquistar, en este caso se espera que los sub-problemas estén traslapados.

- De esta forma se reduce el número de sub-problemas a resolver, de hecho se espera que este número sea pequeño (al menos polinomial)

Contando el número de caminos en un grafo

Dado un grafo $G = (N, A)$, recuerde que una secuencia $a_1, \ldots, a_\ell$ de elementos en N es un camino en G si:

1. $\ell \geq 2$
2. $(a_i, a_{i+1}) \in A$ para cada $i \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$

Decimos que un camino $a_1, \ldots, a_\ell$ va desde a_1 a a_ℓ, y definimos su largo como (ℓ - 1), vale decir, el número de arcos en el camino.

Contando el número de caminos en un grafo

Dado un grafo $G = (N, A)$, un par de nodos b, c en N y un número ℓ, queremos desarrollar un algoritmo que cuente el número de caminos desde b a c en G cuyo largo es igual a ℓ

Suponemos que $N = \{1, \ldots, n\}$, $1 \leq \ell \leq n$ y representamos G a través de su matriz de adyacencia M:

- si $(i, j) \in A$, entonces $M[i, j] = 1$, en caso contrario $M[i, j] = 0$

Queremos entonces definir la función **ContarCaminos**(M, b, c, ℓ)

Una primera definición de **ContarCaminos**

ContarCaminos$(M[1 \ldots n][1 \ldots n],\ b,\ c,\ \ell)$
    if $\ell = 1$ **then return** $M[b, c]$
    else
        $aux := 0$
        for $i := 1$ **to** n **do**
            $aux := aux + M[b, i] \cdot$ **ContarCaminos**$(M,\ i,\ c,\ \ell - 1)$
        return aux

Observe que usamos la notación $C[1 \ldots m][1 \ldots n]$ para indicar que la matriz C tiene m filas y n columnas.

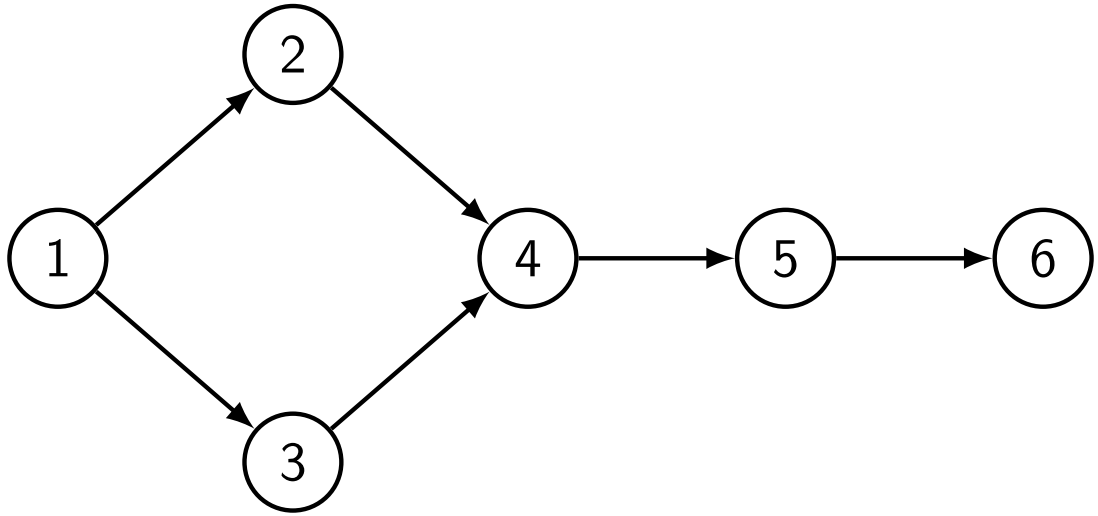
Una segunda definición de **ContarCaminos**

Podemos reducir el número de llamadas recursivas:

ContarCaminos($M[1 \ldots n][1 \ldots n]$, b, c, ℓ)
    if $\ell = 1$ **then return** $M[b, c]$
    else
        $aux := 0$
        for $i := 1$ **to** n **do**
            if $M[b, i] = 1$ **then**
                $aux := aux +$ **ContarCaminos**(M, i, c, $\ell - 1$)
        return aux

Llamadas repetidas en **ContarCaminos**

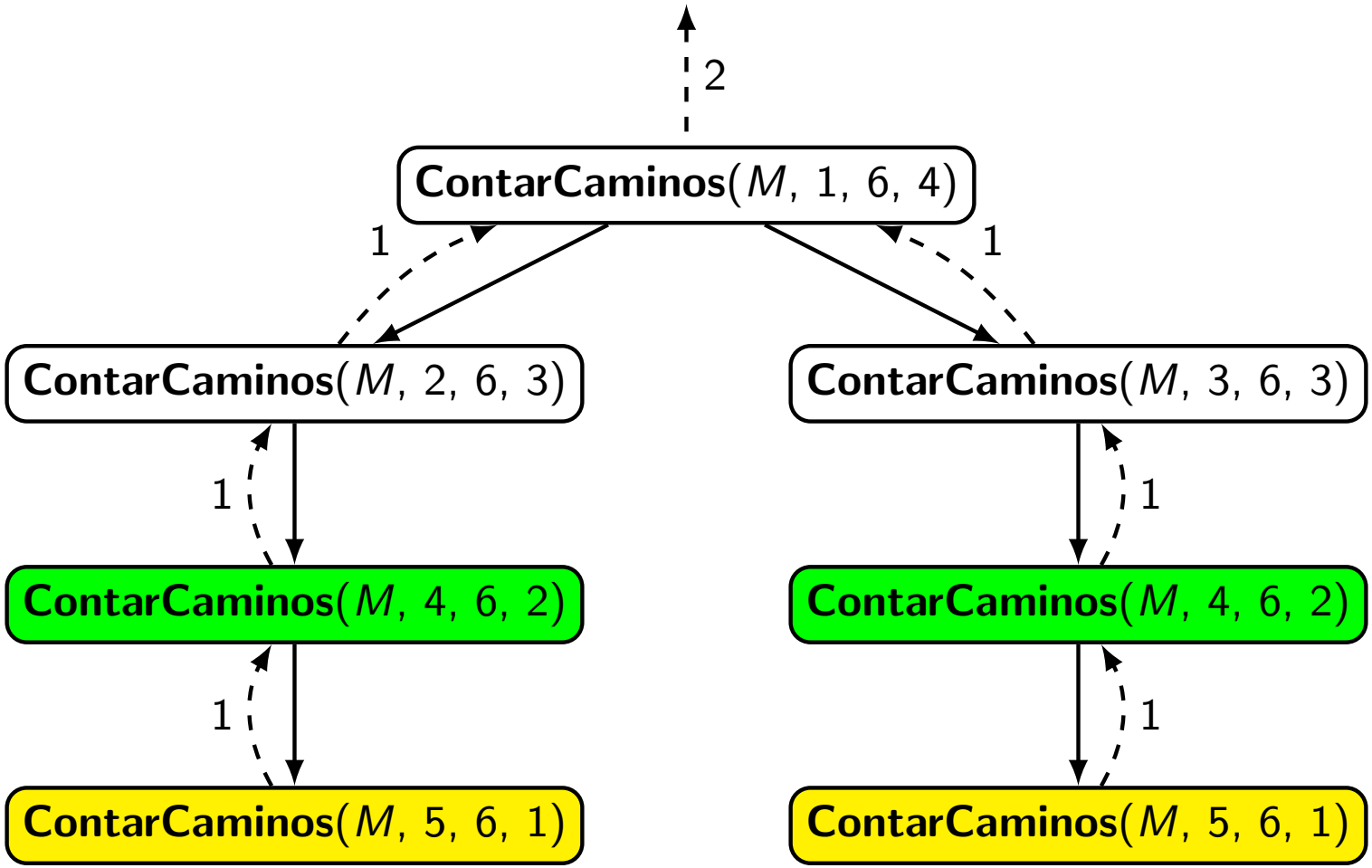
Considere el siguiente grafo G (representado por una matriz M):



Suponga que queremos contar el número de caminos en G desde el nodo 1 al nodo 6 y cuyo largo sea 4

Llamadas repetidas en **ContarCaminos**

Tenemos las siguientes llamadas recursivas:



Llamadas repetidas en **ContarCaminos**

Ejercicio

Demuestre que en el peor caso se debe realizar $\frac{n^\ell - 1}{n - 1}$ llamadas al procedimiento **ContarCaminos**, suponiendo que la entrada es $M[1 \ldots n][1 \ldots n]$, b, c, ℓ con $n \geq 2$

- ¿Para qué grafos obtenemos el peor caso?

El algoritmo realiza muchas llamadas recursivas repetidas.

- Un número exponencial dado que sólo podemos tener $n^2 \cdot \ell$ llamadas distintas en la ejecución de **ContarCaminos**$(M[1 \ldots n][1 \ldots n], b, c, \ell)$

Puesto que tenemos llamadas traslapadas y un espacio pequeño de sub-problemas este es un problema adecuado para programación dinámica.

Una tercera definición de **ContarCaminos**

Queremos calcular el número de caminos de largo ℓ desde un nodo b a un nodo c en un grafo G (representado por una matriz de adyacencia M)

Para evitar hacer llamadas recursivas repetidas, y así disminuir el número de llamadas recursivas, definimos una secuencia de matrices $H_1, \ldots, H_\ell$ tales que:

$H_k[i,j]$ es el número de caminos de i a j de largo k

De esta forma la respuesta a la pregunta inicial está en $H_\ell[b,c]$

La secuencia $H_1, \ldots, H_\ell$ se define de la siguiente forma:

1. $H_1 = M$
2. $H_{k+1} = M \cdot H_k$ para $k \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$

Una tercera definición de **ContarCaminos**

La implementación recursiva de la idea descrita:

ContarTodosCaminos($M[1 \ldots n][1 \ldots n]$, ℓ)
    if $\ell = 1$ **then return** M
    else
        $H :=$ **ContarTodosCaminos**(M, $\ell - 1$)
        return $M \cdot H$

ContarCaminos($M[1 \ldots n][1 \ldots n]$, b, c, ℓ)
    $H :=$ **ContarTodosCaminos**(M, ℓ)
    return $H[b, c]$

La complejidad de **ContarCaminos**

Ejercicio

Demuestre que **ContarCaminos** en el peor caso es $O(\ell \cdot n^{\log_2(7)})$

- ¿Cuál es el tamaño de la entrada para **ContarCaminos**?
- ¿Qué operaciones básicas debemos considerar en el análisis de **ContarCaminos**?
- El algoritmo de Strassen es usado para obtener este resultado

Un primer desafío

Un camino $a_1, \ldots, a_\ell$ en un grafo G es simple si $a_i \neq a_j$ para $1 \leq i < j \leq \ell$

- Vale decir, no tiene nodo repetidos

Ejercicio

Suponga que G es un grafo representado por una matriz de adyacencia M y b, c son dos nodos distintos en G

Queremos implementar la función **ContarCaminosSimples**(M, b, c, ℓ) que retorna el número de caminos simples de largo ℓ desde b a c en G

- ¿Puede esta función ser implementada de manera eficiente usando programación dinámica?
- Si no puede ser implementada, ¿puede demostrar que éste es un problema difícil?

Programación dinámica: un segundo ingrediente

En general, programación dinámica es usada para resolver problemas de optimización.

Para que un problema de optimización pueda ser resuelto con esta técnica se debe cumplir el siguiente principio de optimalidad para los sub-problemas:

Una solución óptima para un problema contiene soluciones óptimas para sus sub-problemas

Vamos a ver un ejemplo de este principio que enfatiza otra característica de programación dinámica: en general los problemas deben ser resuelto de forma bottom-up.

Midiendo la distancia entre dos palabras

Sea $\Sigma = \{a, b, \ldots, z\}$ el alfabeto español, el cual contiene 27 símbolos.

- Vamos a considerar las palabras (strings) sobre el alfabeto Σ

Vamos a utilizar distancia de Levenshtein para medir cuán similares son dos palabras.

- Esta es una de las medidas de similitud de palabras más populares por lo que usualmente es llamada *edit distance*

Dadas dos palabras $w_1, w_2 \in \Sigma^*$, utilizamos la notación $\text{ed}(w_1, w_2)$ para la edit distance entre w_1 y w_2

- Tenemos que $\text{ed} : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \mathbb{N}$

Tres operadores sobre palabras

Sea $w \in \Sigma^*$ con $w = a_1 \cdots a_n$ y $n \geq 0$

- Si $n = 0$ entonces $w = \varepsilon$

Para $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $b \in \Sigma$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{eliminar}(w, i) &= a_1 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n \\ \text{agregar}(w, i, b) &= a_1 \cdots a_i b a_{i+1} \cdots a_n \\ \text{cambiar}(w, i, b) &= a_1 \cdots a_{i-1} b a_{i+1} \cdots a_n \end{aligned}$$

Además, tenemos que $\text{agregar}(w, 0, b) = bw$

Ejemplo

eliminar(hola,1)	=	ola	eliminar(hola,3)	=	hoa
agregar(hola,0,y)	=	yhola	agregar(hola,3,z)	=	holza
cambiar(hola,2,x)	=	hxla			

La distancia de Levenshtein

Dadas palabras $w_1, w_2 \in \Sigma^*$, definimos $\text{ed}(w_1, w_2)$ como el menor número de operaciones eliminar, agregar y cambiar que aplicadas desde w_1 generan w_2

Ejemplo

Tenemos que $\text{ed}(\texttt{casa}, \texttt{asado}) = 3$ puesto que:

$$\begin{aligned} \text{agregar}(\texttt{casa}, 4, \texttt{d}) &= \texttt{casad} \\ \text{eliminar}(\texttt{casad}, 1) &= \texttt{asad} \\ \text{agregar}(\texttt{asad}, 4, \texttt{o}) &= \texttt{asado} \end{aligned}$$

La distancia de Levenshtein

Ejercicios

1. Demuestre que $\text{ed}(w_1, w_2) \leq |w_1| + |w_2|$

2. Demuestre que ed es una función de distancia, vale decir, muestre lo siguiente:

   2.1 $\text{ed}(w_1, w_2) = 0$ si y sólo si $w_1 = w_2$

   2.2 $\text{ed}(w_1, w_2) = \text{ed}(w_2, w_1)$

   2.3 $\text{ed}(w_1, w_2) \leq \text{ed}(w_1, w_3) + \text{ed}(w_3, w_2)$

3. Dadas dos palabras w_1, w_2 del mismo largo, la distancia de Hamming entre w_1 y w_2 es definida como el número de posiciones en las que tienen distintos símbolos. Denote esta distancia como $\text{hd}(w_1, w_2)$

   3.1 Demuestre que $\text{ed}(w_1, w_2) \leq \text{hd}(w_1, w_2)$

   3.2 Encuentre palabras w_3 y w_4 tales que $\text{ed}(w_3, w_4) < \text{hd}(w_3, w_4)$

Calculando la distancia de Levenshtein

Para calcular ed(w_1, w_2) no podemos considerar todas las posibles secuencias de operaciones que aplicadas desde w_1 generan w_2

- Incluso si consideramos las secuencias de largo a los más $|w_1| + |w_2|$ vamos a tener demasiadas posibilidades

Para calcular ed(w_1, w_2) utilizamos programación dinámica.

Notación preliminar

Dado $w \in \Sigma^*$ tal que $|w| = n$, y dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, definimos $w[i]$ como el símbolo de w en la posición i

- Tenemos que $w = w[1] \cdots w[n]$

Además, definimos el infijo de w entre las posiciones i y j como:

$$w[i,j] \quad = \quad \begin{cases} w[i] \cdots w[j] & 1 \leq i \leq j \leq n \\ \varepsilon & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La distancia y un principio optimalidad para sub-secuencias

Sean $w_1, w_2 \in \Sigma^*$, y suponga que $o_1, \ldots, o_k$ es una secuencia óptima de operaciones que aplicadas desde w_1 generan w_2 con $k \geq 1$

- Tenemos que $\text{ed}(w_1, w_2) = k$

Considere $0 \leq i \leq |w_1|$ y suponga que $o_1, \ldots, o_\ell$ es la sub-secuencia de las operaciones en $o_1, \ldots, o_k$ que son aplicadas a $w_1[1, i]$ con $1 \leq \ell \leq k$

Estamos suponiendo que las operaciones sobre $w_1[1, i]$ son las primeras en ser aplicadas, ¿por qué podemos hacer este supuesto?

La distancia y un principio optimalidad para sub-secuencias

Podemos realizar el supuesto por la siguiente razón: si para $s \in \{1, \ldots, \ell - 1\}$ tenemos que o_{s+1} es una operación sobre $w_1[1, i]$ pero o_s no lo es, entonces podemos permutar estas dos operaciones para generar $o_{s+1}, o_s^\star$ tal que:

- si o_{s+1} cambia un símbolo por otro, entonces $o_s^\star = o_s$
- si o_{s+1} agrega un símbolo, entonces $o_s^\star$ se obtiene desde o_s cambiando la posición $t \in \{1, \ldots, n\}$ mencionada en o_s por $t + 1$
- si o_{s+1} elimina un símbolo, entonces $o_s^\star$ se obtiene desde o_s cambiando la posición $t \in \{1, \ldots, n\}$ mencionada en o_s por $t - 1$

Finalmente, suponga que la aplicación de o_1, ..., o_ℓ desde $w_1[1, i]$ genera $w_2[1, j]$ con $0 \leq j \leq |w_2|$

La distancia y un principio optimalidad para sub-secuencias

Entonces la sub-secuencia $o_1, \ldots, o_\ell$ debe ser óptima para la generación de $w_2[1, j]$ a partir de $w_1[1, i]$

- Vale decir, $\text{ed}(w_1[1, i], w_2[1, j]) = \ell$

Suponga que lo anterior no es cierto, y suponga que $o'_1, \ldots, o'_m$ es una secuencia de operaciones con $m < \ell$ que genera $w_2[1, j]$ desde $w_1[1, i]$

En la secuencia $o_1, \ldots, o_k$ que genera w_2 desde w_1 podemos reemplazar $o_1, \ldots, o_\ell$ por $o'_1, \ldots, o'_m$

- La secuencia resultante se puede utilizar para generar w_2 desde w_1

Concluimos que $\text{ed}(w_1, w_2) \leq (k - \ell) + m = k - (\ell - m) < k$, lo que contradice el supuesto inicial.

Una definición recursiva de la distancia de Levenshtein

Fije dos strings $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ tales que $|w_1| = m$ y $|w_2| = n$

Dados $i \in \{0, \ldots, m\}$ y $j \in \{0, \ldots, n\}$, definimos

$$\text{ed}(i, j) \quad = \quad \text{ed}(w_1[1, i], w_2[1, j])$$

Observe que $\text{ed}(w_1, w_2) = \text{ed}(m, n)$

Además, definimos el valor $\text{dif}(i, j)$ como 0 si $w_1[i] = w_2[j]$, y como 1 en caso contrario.

Una definición recursiva de la distancia de Levenshtein

Del principio de optimalidad para sub-secuencias obtenemos la siguiente definición recursiva para la función ed:

$$\text{ed}(i,j) = \begin{cases} \text{máx}\{i,j\} & i = 0 \text{ o } j = 0 \\ \text{mín}\{1 + \text{ed}(i-1,j), & \\ \quad 1 + \text{ed}(i,j-1), & i > 0 \text{ y } j > 0 \\ \quad \text{dif}(i,j) + \text{ed}(i-1,j-1)\} & \end{cases}$$

Tenemos entonces una forma de calcular la función ed que se basa en resolver sub-problemas más pequeños

- Estos sub-problemas están traslapados y se tiene un número polinomial de ellos, podemos aplicar entonces programación dinámica

Una implementación recursiva de la distancia de Levenshtein

EditDistance$(w_1,\ i,\ w_2,\ j)$
  if $i = 0$ **then return** j
  else if $j = 0$ **then return** i
  else
    $r :=$ **EditDistance**$(w_1,\ i-1,\ w_2,\ j)$
    $s :=$ **EditDistance**$(w_1,\ i,\ w_2,\ j-1)$
    $t :=$ **EditDistance**$(w_1,\ i-1,\ w_2,\ j-1)$
    if $w_1[i] = w_2[j]$ **then** $d := 0$
    else $d := 1$
    return mín$\{1 + r, 1 + s, d + t\}$

¿Es esta una buena implementación de **EditDistance**?

- No porque tenemos muchas llamadas recursivas repetidas, es mejor evaluar esta función utilizando un enfoque bottom-up

Una evaluación bottom-up de la distancia de Levenshtein

Para determinar los valores de la función ed construimos una tabla siguiendo un orden lexicográfico para los pares (i, j):

$$(i_1, j_1) < (i_2, j_2) \quad \text{si y sólo si} \quad i_1 < i_2 \text{ o } (i_1 = i_2 \text{ y } j_1 < j_2)$$

Por ejemplo, para determinar el valor de ed(casa, asado) construimos la siguiente tabla:

		a	s	a	d	o
	0	1	2	3	4	5
c	1	1	2	3	4	5
a	2	1	2	2	3	4
s	3	2	1	2	3	4
a	4	3	2	1	2	**3**

Una evaluación bottom-up de la distancia de Levenshtein

A partir de la tabla podemos obtener una secuencia óptima de operaciones para transformar casa en asado:

		a	s	a	d	o
	0	1	2	3	4	5
c	**1**	1	2	3	4	5
a	2	**1**	2	2	3	4
s	3	2	**1**	2	3	4
a	4	3	2	**1**	**2**	**3**

Estas operaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{eliminar}(\texttt{casa}, 1) &= \texttt{asa} \\ \text{agregar}(\texttt{asa}, 3, \texttt{d}) &= \texttt{asad} \\ \text{agregar}(\texttt{asad}, 4, \texttt{o}) &= \texttt{asado} \end{aligned}$$

El costo de calcular la distancia de Levenshtein

¿Qué operaciones debemos contar al analizar la complejidad del algoritmo discutido en las transparencias anteriores?

- Consideramos como operaciones básicas acceder a una celda de la tabla (para leer o escribir), realizar operaciones con elementos de la tabla (sumar o comparar) y comparar elementos de las palabras de entrada

Corolario

Utilizando programación dinámica es posible construir un algoritmo para calcular $ed(w_1, w_2)$ *que en el peor caso es* $\Theta(|w_1| \cdot |w_2|)$

Algoritmos codiciosos

Los algoritmos codiciosos son usados, en general, para resolver problemas de optimización.

El principio fundamental de este tipo de algoritmos es lograr un óptimo global tomando decisiones locales que son óptimas.

- En general, la intuición detrás de estos algoritmos es simple

Dos componentes fundamentales de un algoritmo codicioso:

- Una función objetivo a minimizar o maximizar
- Una función de selección usada para tomar decisiones locales óptimas

Algoritmos codiciosos

Lamentablemente en muchos casos los algoritmos codiciosos no encuentran un óptimo global

- Sin embargo, en muchos casos pueden ser usados como heurísticas para encontrar valores de la función objetivo cercanos al óptimo

Una segunda dificultad con los algoritmos codiciosos es que, en general, se necesita de una demostración formal para asegurar que encuentran el óptimo global

- Aunque pueden ser algoritmos simples, en algunos casos no es obvio por qué encuentran el óptimo global

Vamos a ver un ejemplo clásico de algoritmos codiciosos.

Almacenamiento de datos

Dada una palabra w sobre un alfabeto Σ, suponga que queremos almacenar w utilizando los símbolos 0 y 1

- Esta palabra puede ser pensada como un texto si Σ incluye las letras del alfabeto español, símbolos de puntuación y el espacio, por lo tanto puede ser muy larga
- El uso de 0 y 1 corresponde a la idea de almacenar el texto en un computador

Definimos entonces una función $\tau : \Sigma \to \{0,1\}^*$ que asigna a cada símbolo en $a \in \Sigma$ una palabra en $\tau(a) \in \{0,1\}^*$ con $\tau(a) \neq \varepsilon$

- Vamos a almacenar w reemplazando cada símbolo $a \in \Sigma$ que aparece en w por $\tau(a)$
- Llamamos a τ una Σ-codificación

Almacenamiento de datos

La extensión $\hat{\tau}$ de una Σ-codificación τ a todas las palabras $w \in \Sigma^*$ se define como:

$$\hat{\tau}(w) = \begin{cases} \varepsilon & w = \varepsilon \\ \tau(a_1) \cdots \tau(a_n) & w = a_1 \cdots a_n \text{ con } n \geq 1 \end{cases}$$

Vamos a almacenar w como $\hat{\tau}(w)$

- Si la Σ-codificación τ está fija (como el código ASCII) entonces no es necesario almacenarla
- Si τ no está fija entonces debemos almacenarla junto con $\hat{\tau}(w)$
  - En general $|w|$ es mucho más grande que $|\Sigma|$, por lo que el costo de almacenar τ es despreciable

Almacenamiento de datos

La función $\hat{\tau}$ debe especificar una traducción no ambigua: si $w_1 \neq w_2$, entonces $\hat{\tau}(w_1) \neq \hat{\tau}(w_2)$

- De esta forma podemos reconstruir el texto original dada su traducción

Vale decir, $\hat{\tau}$ debe ser una función inyectiva

- ¿Cómo podemos lograr esta propiedad?

Codificaciones de largo fijo

Obviamente para lograr una traducción no ambigua necesitamos que $\tau(a) \neq \tau(b)$ para cada $a, b \in \Sigma$ tal que $a \neq b$

Para obtener la misma propiedad para $\hat{\tau}$ podemos imponer la siguiente condición: para cada $a, b \in \Sigma$ se tiene que $|\tau(a)| = |\tau(b)|$

- Decimos entonces que τ es una Σ-codificación de largo fijo

Ejercicio

Muestre que para tener una Σ-codificación de largo fijo basta con asignar a cada $a \in \Sigma$ una palabra $\tau(a) \in \{0,1\}^*$ tal que $|\tau(a)| = \lceil \log_2(|\Sigma|) \rceil$

Codificaciones de largo variable

Decimos que τ es una Σ-codificación de largo variable si existen $a, b \in \Sigma$ tales que $|\tau(a)| \neq |\tau(b)|$

¿Por qué nos conviene utilizar codificaciones de largo variable?

- Podemos obtener representaciones más cortas para la palabra que queremos almacenar

Codificaciones de largo variable

Ejemplo

Suponga que $w = aabaacaab$

- Para $\tau_1(a) = 00$, $\tau_1(b) = 01$ y $\tau_1(c) = 10$ tenemos que:

$$\hat{\tau}_1(w) \quad = \quad 000001000010000001$$

- Para $\tau_2(a) = 0$, $\tau_2(b) = 10$ y $\tau_2(c) = 11$ tenemos que:

$$\hat{\tau}_2(w) \quad = \quad 001000110010$$

Por lo tanto $|\hat{\tau}_2(w)| = 12 < 18 = |\hat{\tau}_1(w)|$

Pero nos falta responder una pregunta: ¿por qué $\hat{\tau}_2$ es inyectiva?

Codificaciones de largo variable

Lema

Si existen $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ *tales que* $w_1 \neq w_2$ *y* $\hat{\tau}(w_1) = \hat{\tau}(w_2)$*, entonces existen* $a, b \in \Sigma$ *tales que* $a \neq b$ *y* $\tau(a)$ *es un prefijo de* $\tau(b)$

Demostración: Suponga que $w_1 \neq w_2$, $\hat{\tau}(w_1) = \hat{\tau}(w_2)$ y

$$\begin{array}{lcll} w_1 & = & a_1 \dots a_m & m \geq 1 \\ w_2 & = & b_1 \dots b_n & n \geq 1 \end{array}$$

Además, sin perdida de generalidad suponga que $m \leq n$

Si w_1 es prefijo propio de w_2 entonces $\hat{\tau}(w_1)$ es prefijo propio de $\hat{\tau}(w_2)$

- Puesto que $\tau(a) \neq \varepsilon$ para cada $a \in \Sigma$

Dado que $\hat{\tau}(w_1) = \hat{\tau}(w_2)$, tenemos entonces que w_1 no es prefijo propio de w_2

Codificaciones de largo variable

Sea $k = \min_{1 \leq i \leq m} a_i \neq b_i$

- k está bien definido puesto que $w_1 \neq w_2$ y w_1 no es prefijo propio de w_2

Dado que $\hat{\tau}(a_1 \cdots a_{k-1}) = \hat{\tau}(b_1 \cdots b_{k-1})$ y $\hat{\tau}(w_1) = \hat{\tau}(w_2)$, concluimos que $\hat{\tau}(a_k \cdots a_m) = \hat{\tau}(b_k \cdots b_n)$

Tenemos entonces que $\tau(a_k) \cdots \tau(a_m) = \tau(b_k) \cdots \tau(b_n)$, de lo cual se deduce que $\tau(a_k)$ es un prefijo de $\tau(b_k)$ o $\tau(b_k)$ es un prefijo de $\tau(a_k)$

- Lo cual concluye la demostración puesto que $a_k \neq b_k$ □

Codificaciones libres de prefijos

Decimos que una Σ-codificación τ es libre de prefijos si para cada $a, b \in \Sigma$ tales que $a \neq b$ se tiene que $\tau(a)$ no es un prefijo de $\tau(b)$

Ejemplo

Para $\Sigma = \{a, b, c\}$ y $\tau(a) = 0$, $\tau(b) = 10$, $\tau(c) = 11$, se tiene que τ es libre de prefijos.

Corolario

Si τ es una codificación libre de prefijos, entonces $\hat{\tau}$ es una función inyectiva.

Frecuencias relativas de los símbolos

Palabra a almacenar: $w \in \Sigma^*$

Para $a \in \Sigma$ definimos $\text{fr}_w(a)$ como la frecuencia relativa de a en w, vale decir, el número de apariciones de a en w dividido por el largo de w

- Por ejemplo, si $w = aabaacaab$, entonces $\text{fr}_w(a) = \frac{2}{3}$ y $\text{fr}_w(c) = \frac{1}{9}$

Para una Σ-codificación τ definimos el largo promedio para w como:

$$\text{lp}_w(\tau) \quad = \quad \sum_{a \in \Sigma} \text{fr}_w(a) \cdot |\tau(a)|$$

Tenemos entonces que $|\hat{\tau}(w)| = \text{lp}_w(\tau) \cdot |w|$

- Por lo tanto queremos una Σ-codificación τ que minimice $\text{lp}_w(\tau)$

Frecuencias relativas de los símbolos y la función objetivo

Problema de optimización a resolver

Dado $w \in \Sigma^*$, encontrar una Σ-codificación τ libre de prefijos que minimice el valor $\mathrm{lp}_w(\tau)$

La función objetivo del algoritmo codicioso es entonces $\mathrm{lp}_w(x)$

- Queremos minimizar el valor de esta función

Frecuencias relativas de los símbolos y la función objetivo

La función $\mathrm{lp}_w(x)$ se define a partir de la función $\mathrm{fr}_w(y)$

- No se necesita más información sobre w. En particular, no se necesita saber cuál es el símbolo de w en una posición específica

Podemos entonces trabajar con funciones de frecuencias relativas en lugar de palabras

- La entrada del problema no va a ser w sino que fr_w

Frecuencias relativas de los símbolos y la función objetivo

Decimos que $f : \Sigma \to (0, 1)$ es una función de frecuencias relativas para Σ si se cumple que $\sum_{a \in \Sigma} f(a) = 1$

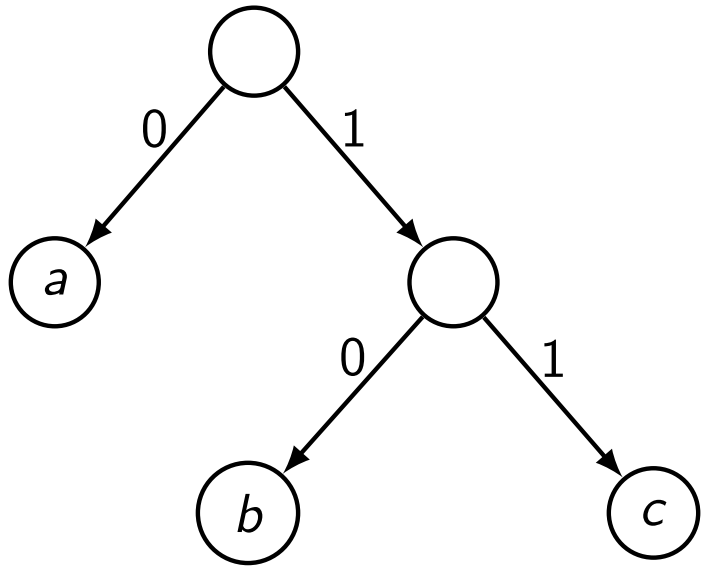
Dada una función f de frecuencias relativas para Σ y una Σ-codificación τ, el largo promedio de τ para f se define como:

$$\mathrm{lp}_f(\tau) \quad = \quad \sum_{a \in \Sigma} f(a) \cdot |\tau(a)|$$

La entrada del problema es entonces una función f de frecuencias relativas para Σ, y la función objetivo a minimizar es $\mathrm{lp}_f(x)$

Un ingrediente fundamental: codificaciones como árboles

Representamos la codificación $\tau(a) = 0$, $\tau(b) = 10$, $\tau(c) = 11$ como un árbol binario:



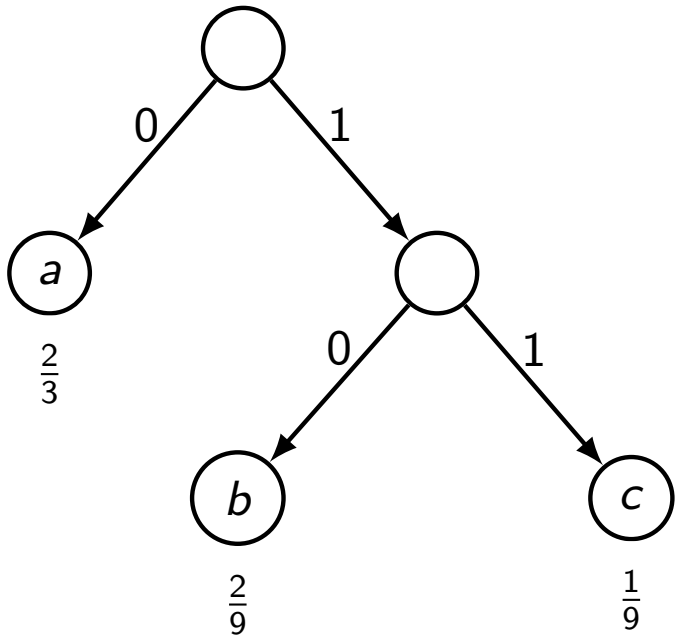
Un ingrediente fundamental: codificaciones como árboles

Si una Σ-codificación τ es libre de prefijos, entonces el árbol que la representa satisface las siguientes propiedades.

- Cada hoja tiene como etiqueta un elemento de Σ, y estos son los únicos nodos con etiquetas
- Cada símbolo de Σ es usado exactamente una vez como etiqueta
- Cada arco tiene etiqueta 0 ó 1
- Si una hoja tiene etiqueta e y las etiquetas de los arcos del camino desde la raíz hasta esta hoja forman una palabra $w \in \{0,1\}^*$, entonces $\tau(e) = w$

Codificaciones como árboles y las frecuencias relativas

Podemos agregar al árbol binario que representa una codificación τ la información sobre las frecuencias relativas dadas por una función f:



Llamamos a este árbol abf(τ, f)

- ¡Estos árboles son muy útiles!

Alguna propiedades importantes

Ejercicios

Sea f una función de frecuencias relativas para Σ y τ una Σ-codificación libre de prefijos que minimiza la función $\mathrm{lp}_f(x)$

1. Sean u y v dos hojas en $\mathrm{abf}(\tau, f)$ con etiquetas a y b, respectivamente. Demuestre que si el camino de la raíz a u es más corto que el camino de la raíz a v, entonces $f(a) \geq f(b)$

2. Demuestre que cada nodo interno en $\mathrm{abf}(\tau, f)$ tiene dos hijos

3. Sean $a, b \in \Sigma$ tales que $a \neq b$, $f(a) \leq f(b)$ y $f(b) \leq f(e)$ para todo $e \in (\Sigma \setminus \{a, b\})$. Demuestre que existe una Σ-codificación τ' libre de prefijos tal que $\mathrm{lp}_f(\tau') = \mathrm{lp}_f(\tau)$ y las hojas con etiquetas a y b en $\mathrm{abf}(\tau', f)$ son hermanas
   - Vale decir, existe $w \in \{0,1\}^*$ tal que $\tau'(a) = w0$ y $\tau'(b) = w1$

Calculando el mínimo de $\mathrm{lp}_f(x)$

Vamos a ver un algoritmo codicioso para calcular una Σ-codificación τ libre de prefijos que minimiza $\mathrm{lp}_f(x)$

- El algoritmo calcula la codificación de Huffman

El algoritmo tiene los ingredientes mencionados de un algoritmo codicioso.

- Función objetivo a minimizar: $\mathrm{lp}_f(x)$
- Función de selección: elige los dos símbolos de Σ con menor frecuencia relativa, los coloca como hermanos en el árbol binario que representa la Σ-codificación óptima, y continua la construcción con el resto de los símbolos de Σ

Además, es necesario realizar una demostración para probar que el algoritmo es correcto.

El algoritmo de Huffman

En el siguiente algoritmo representamos a las funciones como conjuntos de pares ordenados, y suponemos que f es una función de frecuencias relativas que al menos tiene dos elementos en el dominio.

CalcularCodificaciónHuffman(f)

Sea Σ el dominio de la función f

if $\Sigma = \{a, b\}$ **then return** $\{(a, 0), (b, 1)\}$

else

Sean $a, b \in \Sigma$ tales que $a \neq b$, $f(a) \leq f(b)$ y
$f(b) \leq f(e)$ para todo $e \in (\Sigma \setminus \{a, b\})$

Sea c un símbolo que **no** aparece en Σ

$g := (f \setminus \{(a, f(a)), (b, f(b))\}) \cup \{(c, f(a) + f(b))\}$

$\tau^\star :=$ **CalcularCodificaciónHuffman**(g)

$w := \tau^\star(c)$

$\tau := (\tau^\star \setminus \{(c, w)\}) \cup \{(a, w0), (b, w1)\}$

return τ

La correctitud de **CalcularCodificaciónHuffman**

Teorema

*Si f es una función de frecuencias relativas, Σ es el dominio de f y $\tau =$ **CalcularCodificaciónHuffman**(f), entonces τ es una Σ-codificación libre de prefijos que minimiza la función $lp_f(x)$*

Demostración: Vamos a realizar la demostración por inducción en $|\Sigma|$

Si $|\Sigma| = 2$, entonces la propiedad se cumple trivialmente

- ¿Por qué?

Suponga entonces que la propiedad se cumple para un valor $n \geq 2$, y suponga que $|\Sigma| = n + 1$

La demostración del teorema

Sean a, b, c, g, $\tau^\star$ y τ definidos como en el código de la llamada **CalcularCodificaciónHuffman**(f), y sea Γ el dominio de g

Como $|\Gamma| = n$ y $\tau^\star =$ **CalcularCodificaciónHuffman**(g), por hipótesis de inducción tenemos que $\tau^\star$ es una Γ-codificación libre de prefijos que minimiza la función $\mathrm{lp}_g(x)$

Dada la definición de τ es simple verificar las siguientes propiedades:

- τ es una codificación libre de prefijos
- Para cada $e \in (\Sigma \setminus \{a, b\})$ se tiene que $\tau(e) = \tau^\star(e)$
- $|\tau(a)| = |\tau(b)| = |\tau^\star(c)| + 1$

La demostración del teorema

Por contradicción suponga que τ no minimiza el valor de la función $\mathrm{lp}_f(x)$

- Vale decir, existe una Σ-codificación τ' libre de prefijos tal que τ' minimiza la función $\mathrm{lp}_f(x)$ y $\mathrm{lp}_f(\tau') < \mathrm{lp}_f(\tau)$

Por la definición de a, b y los ejercicios anteriores podemos suponer que existe $w \in \{0,1\}^*$ tal que $\tau'(a) = w0$ y $\tau'(b) = w1$

- Nótese que $w \neq \varepsilon$ puesto que $|\Sigma| \geq 3$

A partir de τ' defina la siguiente Γ-codificación τ'':

$$\tau'' \quad = \quad (\tau' \setminus \{(a, \tau'(a)), (b, \tau'(b))\}) \cup \{(c, w)\}$$

Tenemos que τ'' es una Γ-codificación libre de prefijos

- ¿Por qué?

La relación entre $\mathrm{lp}_g(\tau^\star)$ y $\mathrm{lp}_f(\tau)$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{lp}_g(\tau^\star) &= \sum_{e \in \Gamma} g(e) \cdot |\tau^\star(e)| \\
&= \left(\sum_{e \in (\Gamma \setminus \{c\})} g(e) \cdot |\tau^\star(e)| \right) + g(c) \cdot |\tau^\star(c)| \\
&= \left(\sum_{e \in (\Sigma \setminus \{a,b\})} f(e) \cdot |\tau(e)| \right) + (f(a) + f(b)) \cdot |\tau^\star(c)| \\
&= \left(\sum_{e \in (\Sigma \setminus \{a,b\})} f(e) \cdot |\tau(e)| \right) + f(a) \cdot |\tau^\star(c)| + f(b) \cdot |\tau^\star(c)| \\
&= \left(\sum_{e \in (\Sigma \setminus \{a,b\})} f(e) \cdot |\tau(e)| \right) + f(a) \cdot (|\tau(a)| - 1) + f(b) \cdot (|\tau(b)| - 1) \\
&= \left(\sum_{e \in \Sigma} f(e) \cdot |\tau(e)| \right) - (f(a) + f(b)) \\
&= \mathrm{lp}_f(\tau) - (f(a) + f(b))
\end{aligned}
$$

La relación entre $\mathrm{lp}_g(\tau'')$ y $\mathrm{lp}_f(\tau')$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{lp}_g(\tau'') &= \sum_{e \in \Gamma} g(e) \cdot |\tau''(e)| \\
&= \left(\sum_{e \in (\Gamma \setminus \{c\})} g(e) \cdot |\tau''(e)| \right) + g(c) \cdot |\tau''(c)| \\
&= \left(\sum_{e \in (\Sigma \setminus \{a,b\})} f(e) \cdot |\tau'(e)| \right) + (f(a) + f(b)) \cdot |\tau''(c)| \\
&= \left(\sum_{e \in (\Sigma \setminus \{a,b\})} f(e) \cdot |\tau'(e)| \right) + f(a) \cdot |\tau''(c)| + f(b) \cdot |\tau''(c)| \\
&= \left(\sum_{e \in (\Sigma \setminus \{a,b\})} f(e) \cdot |\tau'(e)| \right) + f(a) \cdot (|\tau'(a)| - 1) + f(b) \cdot (|\tau'(b)| - 1) \\
&= \left(\sum_{e \in \Sigma} f(e) \cdot |\tau'(e)| \right) - (f(a) + f(b)) \\
&= \mathrm{lp}_f(\tau') - (f(a) + f(b))
\end{aligned}
$$

Obteniendo una contradicción

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \mathrm{lp}_g(\tau'') &= \mathrm{lp}_f(\tau') - (f(a) + f(b)) \\ &< \mathrm{lp}_f(\tau) - (f(a) + f(b)) \\ &= \mathrm{lp}_g(\tau^\star) \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $\tau^\star$ no minimiza la función $\mathrm{lp}_g(x)$, lo cual contradice la hipótesis de inducción. □

Dos comentarios finales

La siguiente función calcula la codificación de Huffman teniendo como entrada una palabra w:

CalcularCodificaciónHuffman(w)
    if $w = \varepsilon$ **then return** $\emptyset$
    else
        $\Sigma :=$ conjunto de símbolos mencionados en w
        if $\Sigma = \{a\}$ **then return** $\{(a, 0)\}$
        else return CalcularCodificaciónHuffman(fr_w)

¿Cuál es la complejidad de **CalcularCodificaciónHuffman**(f)?

- ¿Qué estructura de datos debería ser utilizada para almacenar f?