

IIC2283 — Diseño y Análisis de Algoritmos

Ayudantía 2

Problema 1

Clasifique las siguientes recurrencias, donde en todos los casos se asume que $T(0) = c$, para alguna constante c fija.

1. $T(n) = 3T(\lceil n/3 \rceil) + n/11$

Solución Se utiliza el teorema maestro:

$$\begin{aligned}a &= 3 \\b &= 3 \\f(n) &= n/11\end{aligned}$$

Luego, se tiene que $n/11 = (1/11) \cdot n$, y por lo tanto que $n/11 \in \Theta(n)$. Por el segundo caso del teorema, se concluye que $T(n) \in \Theta(n \log n)$

2. $T(n) = 16T(\lceil n/4 \rceil) + \kappa n$, donde $\kappa > 0$ es constante

Solución Por el teorema maestro:

$$\begin{aligned}a &= 16 \\b &= 4 \\f(n) &= \kappa n\end{aligned}$$

Luego, se tiene que si $\varepsilon = 1$, entonces $\kappa n \leq tn^{2-1}$, cuando $t = \kappa$, y $n \geq 1$. Esto muestra que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, y por lo tanto que se está en el primer caso del teorema. Luego, se concluye que $T(n) \in \Theta(n^2)$.

3. $T(n) = 3T(\lfloor n/2 \rfloor) + \sqrt{n}$

Solución Usando el teorema maestro:

$$\begin{aligned}a &= 3 \\b &= 2 \\f(n) &= \sqrt{n} = n^{1/2}\end{aligned}$$

En este caso, como $\log_2 3 > 1$, entonces $\log_2 3 - 1/2 > 1/2$, y por lo tanto para todo $n \geq 1$, $n^{1/2} \leq n^{\log_2 3 - 1/2}$, y por lo tanto $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, con $\varepsilon > 0$. Luego, se concluye que $T(n) \in \Theta(n^{\log_2 3})$

4. $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + n \log n$

Solución Los parámetros para el teorema maestro son:

$$\begin{aligned}a &= 3 \\b &= 4 \\f(n) &= n \log n\end{aligned}$$

Aquí, $\log_4 3 < 1$, por lo tanto existe $\varepsilon' > 0$, tal que $\log_4 3 + \varepsilon' < 1$. Por otra parte, si $n \geq 2$, $n \log n \geq n > n^{\log_4 3 + \varepsilon'}$, por lo tanto $f \in \Omega(n^{\log_4 3 + \varepsilon'})$.

Luego, se estaría en el tercer caso del teorema, pero falta verificar que $n \log n$ es $(3, 4)$ -regular. Para esto, basta encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$, y $c \in \mathbb{R}^+$, con $c < 1$, tales que para todo $n \geq n_0$,

$$3f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) \leq cf(n)$$

Desarrollando, se tiene que:

$$\begin{aligned}3f\left(\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right) &= 3 \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \log \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \\&\leq 3 \left(\frac{n}{4}\right) \log \left(\frac{n}{4}\right) \\&= \frac{3}{4}n(\log n - 2) \\&\leq \frac{3}{4}n \log n\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se cumple para $n \geq 1$. Luego, con $c = 3/4$, y $n_0 = 1$, se obtiene que la función es $(3, 4)$ -regular, y por lo tanto, que $T(n) \in \Theta(n \log n)$

5. $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n \log n$

Solución Se intenta usar el teorema maestro:

$$\begin{aligned}a &= 2 \\b &= 2 \\f(n) &= n \log n\end{aligned}$$

En este caso, no se cumple que $n \log n \in O(n^{1-\varepsilon})$, tampoco se cumple que $n \log n \in \Theta(n)$, pero si se cumple que $n \log n \in \Omega(n)$, por lo que podría estar en el tercer caso. Luego, se necesita encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $n \log n \in \Omega(n^{1+\varepsilon})$, pero esto no es posible. Por definición, se necesitaría que existan n_0 y c tales que para todo $n \geq n_0$,

$$n \log n \geq cn^{1+\varepsilon}.$$

Al dividir por n , usando que $n > 0$, se obtiene que $\log n$ debería ser mayor o igual a cn^ε para todo $n \geq n_0$, pero esto no se cumple cuando $\varepsilon > 0$. Esto muestra que esta recurrencia no puede ser clasificada con el teorema maestro.

De todas formas, se puede demostrar que $T \in \Theta(n \log^2 n)$ utilizando sustitución de variables (Ayudantía 1, problema 4.3).

Problema 2

Considere la siguiente ecuación de recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ a \cdot T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + b \cdot T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + c \cdot n^k & n > 1 \end{cases}$$

donde $a, b, k \in \mathbb{N}$, $a, b > 0$, y $c \in \mathbb{R}^+$

De una clasificación completa del orden de $T(n)$, dependiendo de los valores de a, b , y k . Esta clasificación debe ser hecha en términos de la notación asintótica Θ .

Idea de solución Primero, se demuestra por inducción que T es no decreciente, es decir que

$$T(n+1) \geq T(n).$$

Si $n = 1$, entonces $T(2) = c \geq 0 = T(1)$. Luego, para $n > 1$, por hipótesis de inducción, $T(\lfloor n/2 \rfloor) \leq T(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)$, y también $T(\lceil n/2 \rceil) \leq T(\lceil (n+1)/2 \rceil)$, y por lo tanto $T(n) \leq T(n+1)$.

Luego, se obtiene que:

$$(a+b)T(\lfloor n/2 \rfloor) + c \cdot n^k \leq T(n) \leq (a+b)T(\lceil n/2 \rceil) + c \cdot n^k,$$

y se definen dos recurrencias auxiliares:

$$T_1(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ (a+b)T(\lfloor n/2 \rfloor) + c \cdot n^k & n > 1 \end{cases}$$

$$T_2(n) = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ (a+b)T(\lceil n/2 \rceil) + c \cdot n^k & n > 1 \end{cases}$$

donde $T \in O(T_2)$ y $T \in \Omega(T_1)$. Cuando el teorema maestro es aplicable, T_1 y T_2 tienen el mismo comportamiento, por lo que se evalúan las condiciones del teorema:

- $n^k \in O(n^{\log_2(a+b)-\epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$ si y solo si $k < \log_2(a+b)$
- $n^k \in \Theta(n^{\log_2(a+b)})$ si y solo si $k = \log_2(a+b)$
- $n^k \in \Omega(n^{\log_2(a+b)+\epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$ si y solo si $k > \log_2(a+b)$

De esta forma, se puede caracterizar el comportamiento de T para cualquier combinación de a, b, k , a menos que $k > \log_2(a+b)$, y $c \cdot n^k$ no sea $(a+b, 2)$ -regular. Usando la definición de regularidad, se puede demostrar que esto no es posible, por que:

$$(a+b)c\lfloor n/2 \rfloor^k \leq (a+b)c(n/2)^k = \frac{a+b}{2^k}cn,$$

y luego como $k > \log_2(a+b)$, entonces $2^k > a+b$, y se puede elegir la constante $\frac{a+b}{2^k} < 1$.

De lo anterior, se concluye la siguiente clasificación:

- Si $k < \log_2(a+b)$, entonces $T \in \Theta(n^{\log_2(a+b)})$
- Si $k = \log_2(a+b)$, entonces $T \in \Theta(n^{\log_2(a+b)} \cdot \log_2 n)$
- Si $k > \log_2(a+b)$, entonces $T \in \Theta(n^k)$.

Problema 3

Se busca analizar el algoritmo BUCKETSORT. En la descripción, A es una lista de n valores desordenados entre 0 y 1.

```
function BUCKETSORT( $A$ )  
  for  $i = 0..(n - 1)$  do  
     $B[i] \leftarrow \emptyset$   
  end for  
  for  $i = 0..(n - 1)$  do  
    Insertar  $A[i]$  en la lista  $B[\lfloor A[i] \cdot n \rfloor]$   
  end for  
  for  $i = 0..(n - 1)$  do  
    Ordenar  $B[i]$  con Insertion Sort  
  end for  
  return Concatenación de  $B$  en orden  
end function
```

Demuestre que si los valores de A distribuyen $Uniforme(0, 1)$, entonces en promedio el algoritmo funciona en tiempo $\Theta(n)$.

Solución Denominamos por n_i a una variable aleatoria que indica la cantidad de elementos en el bucket i . Como insertion sort funciona en tiempo $O(n^2)$, entonces el tiempo de bucket sort está dado por:

$$T(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2).$$

Luego, el tiempo promedio del algoritmo es:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T(n)] &= \mathbb{E}\left[\Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)\right] \\ &= \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[O(n_i^2)] \\ &= \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(\mathbb{E}[n_i^2]). \end{aligned}$$

Por lo que se necesita resolver $\mathbb{E}[n_i^2]$. Para esto, definimos el conjunto de variables aleatorias X_{ij} , donde

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & A[j] \text{ se asignó al bucket } B[i] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Considerando lo anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[n_i^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} X_{ij}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1} X_{ij}^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} X_{ij} X_{ik}\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_{ij}^2] + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \mathbb{E}[X_{ij} X_{ik}].
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{E}[X_{ij}^2] = 1^2 \cdot \Pr[X_{ij} = 1] + 0^2 \cdot \Pr[X_{ij} = 0] = \frac{1}{n}.$$

Por otra parte, si $j \neq k$, entonces X_{ij} es independiente con X_{ik} , y por lo tanto

$$\mathbb{E}[X_{ij} X_{ik}] = \mathbb{E}[X_{ij}] \mathbb{E}[X_{ik}] = \frac{1}{n^2}.$$

Finalmente, reemplazando en la expresi3n anterior, se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[n_i^2] &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}[X_{ij}^2] + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \mathbb{E}[X_{ij} X_{ik}] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n-1} \frac{1}{n^2} \\
&= 1 + \frac{n(n-1)}{n^2} \\
&= 2 - \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

y por lo tanto, que

$$\mathbb{E}[T(n)] = \Theta(n) + O(n(2 - 1/n)) \in \Theta(n).$$