La mediana de una lista de números enteros

Suponga que n es un número impar y $L[1 \ldots n]$ es una lista de números enteros sin elementos repetidos.

- Recuerde que usamos la notación $L[1 \ldots n]$ para indicar que L es una lista con n elementos

La mediana de una lista de números enteros

Suponga que n es un número impar y $L[1 \ldots n]$ es una lista de números enteros sin elementos repetidos.

- Recuerde que usamos la notación $L[1 \ldots n]$ para indicar que L es una lista con n elementos

$L[i]$ es la mediana de L si:

$$
\begin{aligned}
|\{j \in \{1, \ldots, n\} \mid L[j] < L[i]\}| &= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\
|\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid L[k] > L[i]\}| &= \lfloor \frac{n}{2} \rfloor
\end{aligned}
$$

La mediana de una lista de números enteros

Ejercicio

Construya un algoritmo que calcule la mediana de una lista $L[1 \ldots n]$ y que en el peor caso sea $O(n \cdot \log_2(n))$

- Considere como la operación básica a contar la comparación de números enteros

La mediana de una lista de números enteros

Ejercicio

Construya un algoritmo que calcule la mediana de una lista $L[1 \ldots n]$ y que en el peor caso sea $O(n \cdot \log_2(n))$

- Considere como la operación básica a contar la comparación de números enteros

Vamos a construir un algoritmo aleatorizado de tipo Las Vegas para este problema.

- ¡Este algoritmo funciona en tiempo lineal!

Un algoritmo aleatorizado para el cálculo de la mediana

Suponga que el procedimiento **Mergesort**(L) ordena una lista L utilizando el algoritmo Mergesort

- Recuerde que las listas son pasados por referencia en este curso

Un algoritmo aleatorizado para el cálculo de la mediana

Suponga que el procedimiento **Mergesort**(L) ordena una lista L utilizando el algoritmo Mergesort

- Recuerde que las listas son pasados por referencia en este curso

El siguiente procedimiento calcula la mediana de una lista de enteros $L[1 \ldots n]$ (suponiendo que n es impar y L no tiene elementos repetidos):

CalcularMediana($L[1 \ldots n]$)
  if $n < 2001$ **then**
    Mergesort(L)
    return $L[\lceil \frac{n}{2} \rceil]$
  else
    sea R una lista de $\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil$ números enteros escogido con
      distribución uniforme y de manera independiente desde L
    Mergesort(R)

Un algoritmo aleatorizado para el cálculo de la mediana

$d := R[\lfloor \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} \rfloor]$
$u := R[\lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil]$
$S := \emptyset$
$m_d := 0$
$m_u := 0$
for $i := 1$ **to** n **do**
  if $d \leq L[i]$ **and** $L[i] \leq u$ **then** **Append**$(S, [L[i]])$
  else if $L[i] < d$ **then** $m_d := m_d + 1$
  else $m_u := m_u + 1$
if $m_d \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ **or** $m_u \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ **or**
    Length$(S) > 4 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor$ **then return** *sin_resultado*
else
  Mergesort(S)
  return $S[\lceil \frac{n}{2} \rceil - m_d]$

El algoritmo es correcto y eficiente

Ejercicios

Demuestre lo siguiente:

1. Si **CalcularMediana**(L) retorna un número entero m, entonces m es la mediana de L
2. Si se tiene un procedimiento **LanzarMoneda**() que retorna 0 ó 1 con probabilidad $\frac{1}{2}$, entonces existe un algoritmo para construir R que invoca a este procedimiento a los más $c \cdot n^{\frac{3}{4}} \cdot \log_2(n)$ veces, donde c es una constante fija y n es el largo de la lista de entrada
   - Podemos suponer que **LanzarMoneda**() en el peor caso es $O(1)$
3. **CalcularMediana**(L) en el peor caso es $O(n)$, suponiendo que n es el largo de L y considerando todas las operaciones realizadas

¿Cuál es la probabilidad de no retornar un resultado?

La llamada **CalcularMediana**(L) puede no retornar un resultado

- El procedimiento en este caso retorna *sin_resultado*

Para que **CalcularMediana** pueda ser utilizado en la práctica la probabilidad que no entregue un resultado debe ser baja

¿Cuál es la probabilidad de no retornar un resultado?

La llamada **CalcularMediana**(L) puede no retornar un resultado

- El procedimiento en este caso retorna *sin_resultado*

Para que **CalcularMediana** pueda ser utilizado en la práctica la probabilidad que no entregue un resultado debe ser baja

- Vamos a demostrar esto

La probabilidad de no retornar resultado

Sea $L[1 \ldots n]$ una lista de números enteros tal que $n \geq 2001$, n es impar y la mediana de L es m

La probabilidad de no retornar resultado

Sea $L[1 \ldots n]$ una lista de números enteros tal que $n \geq 2001$, n es impar y la mediana de L es m

Defina las siguientes variables aleatorias:

$$\begin{aligned} Y_1 &= |\{i \in \{1, \ldots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\} \mid R[i] \leq m\}| \\ Y_2 &= |\{i \in \{1, \ldots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\} \mid R[i] \geq m\}| \end{aligned}$$

La probabilidad de no retornar resultado

Sea $L[1 \ldots n]$ una lista de números enteros tal que $n \geq 2001$, n es impar y la mediana de L es m

Defina las siguientes variables aleatorias:

$$\begin{aligned} Y_1 &= |\{i \in \{1, \ldots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\} \mid R[i] \leq m\}| \\ Y_2 &= |\{i \in \{1, \ldots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\} \mid R[i] \geq m\}| \end{aligned}$$

Estas son variables aleatorias dado que R es construido escogiendo elementos de L con distribución uniforme (y de manera independiente)

La probabilidad de no retornar resultado

Lema

CalcularMediana(L) *retorna sin_resultado si y sólo si alguna de las siguientes condiciones se cumple:*

1. $Y_1 < \lfloor \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} \rfloor$
2. $Y_2 \leq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil$
3. $\textbf{Length}(S) > 4 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor$

La probabilidad de no retornar resultado

Lema

CalcularMediana(L) *retorna sin_resultado si y sólo si alguna de las siguientes condiciones se cumple:*

1. $Y_1 < \lfloor \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} \rfloor$
2. $Y_2 \leq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil$
3. **Length**$(S) > 4 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor$

Ejercicio

Demuestre el lema.

La probabilidad de no retornar resultado

Tenemos entonces que la probabilidad de que **CalcularMediana**(L) retorne *sin_resultado* es igual a:

$$\Pr(Y_1 < \lfloor \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} \rfloor \vee$$
$$Y_2 \leq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil \ \vee \ \mathbf{Length}(S) > 4 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor)$$

La probabilidad de no retornar resultado

Tenemos entonces que la probabilidad de que **CalcularMediana**(L) retorne *sin_resultado* es igual a:

$$\Pr(Y_1 < \lfloor \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} \rfloor \vee$$

$$Y_2 \leq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil \ \vee \ \textbf{Length}(S) > 4 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor)$$

Necesitamos entonces acotar superiormente $\Pr(Y_1 < \lfloor \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} \rfloor)$, $\Pr(Y_2 \leq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil)$ y $\Pr(\textbf{Length}(S) > 4 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor)$

La probabilidad de no retornar resultado

Tenemos entonces que la probabilidad de que **CalcularMediana**(L) retorne *sin_resultado* es igual a:

$$\Pr(Y_1 < \lfloor \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} \rfloor \vee$$

$$Y_2 \leq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil \ \vee \ \textbf{Length}(S) > 4 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor)$$

Necesitamos entonces acotar superiormente $\Pr(Y_1 < \lfloor \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} \rfloor)$, $\Pr(Y_2 \leq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil)$ y $\Pr(\textbf{Length}(S) > 4 \cdot \lfloor n^{\frac{3}{4}} \rfloor)$

- Vamos a ver dos desigualdades muy útiles para acotar probabilidades

La desigualdad de Markov

Teorema

Sea X una variable aleatoria no negativa. Para cada $a \in \mathbb{R}^+$ se tiene que:

$$Pr(X \geq a) \quad \leq \quad \frac{E(X)}{a}$$

Una demostración de la desigualdad de Markov

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{r \in \mathbb{R}_0^+} r \cdot \Pr(X = r) \\
&= \Bigg(\sum_{r \in \mathbb{R}_0^+ \,:\, r < a} r \cdot \Pr(X = r) \Bigg) + \Bigg(\sum_{s \in \mathbb{R}_0^+ \,:\, s \geq a} s \cdot \Pr(X = s) \Bigg) \\
&\geq \sum_{s \in \mathbb{R}_0^+ \,:\, s \geq a} s \cdot \Pr(X = s) \\
&\geq \sum_{s \in \mathbb{R}_0^+ \,:\, s \geq a} a \cdot \Pr(X = s) \\
&= a \cdot \Bigg(\sum_{s \in \mathbb{R}_0^+ \,:\, s \geq a} \Pr(X = s) \Bigg) \\
&= a \cdot \Pr(X \geq a)
\end{aligned}
$$

Una demostración de la desigualdad de Markov

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{r \in \mathbb{R}_0^+} r \cdot \Pr(X = r) \\
&= \Bigg(\sum_{r \in \mathbb{R}_0^+ \,:\, r < a} r \cdot \Pr(X = r) \Bigg) + \Bigg(\sum_{s \in \mathbb{R}_0^+ \,:\, s \geq a} s \cdot \Pr(X = s) \Bigg) \\
&\geq \sum_{s \in \mathbb{R}_0^+ \,:\, s \geq a} s \cdot \Pr(X = s) \\
&\geq \sum_{s \in \mathbb{R}_0^+ \,:\, s \geq a} a \cdot \Pr(X = s) \\
&= a \cdot \Bigg(\sum_{s \in \mathbb{R}_0^+ \,:\, s \geq a} \Pr(X = s) \Bigg) \\
&= a \cdot \Pr(X \geq a)
\end{aligned}
$$

Concluimos que $\Pr(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{a}$ $\square$

La desigualdad de Chebyshev

Teorema

$$Pr(|X - E(X)| \geq a) \quad \leq \quad \frac{Var(X)}{a^2}$$

La desigualdad de Chebyshev

Teorema

$$Pr(|X - E(X)| \geq a) \quad \leq \quad \frac{Var(X)}{a^2}$$

Demostración. Utilizando la desigualdad de Markov obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Pr(|X - \mathrm{E}(X)| \geq a) &= \Pr((X - \mathrm{E}(X))^2 \geq a^2) \\
&\leq \frac{\mathrm{E}((X - \mathrm{E}(X))^2)}{a^2} \\
&= \frac{\mathrm{Var}(X)}{a^2}
\end{aligned}$$

$\square$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

Lema

$$Pr(Y_1 < \lfloor \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} \rfloor) \quad \leq \quad n^{-\frac{1}{4}}$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

Lema

$$Pr(Y_1 < \lfloor \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} \rfloor) \quad \leq \quad n^{-\frac{1}{4}}$$

Demostración: para cada $i \in \{1, \ldots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\}$, definimos una variable aleatoria X_i de la siguiente forma:

$$X_i \quad = \quad \begin{cases} 1 & R[i] \leq m \\ 0 & R[i] > m \end{cases}$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

Lema

$$Pr(Y_1 < \lfloor \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} \rfloor) \quad \leq \quad n^{-\frac{1}{4}}$$

Demostración: para cada $i \in \{1, \ldots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\}$, definimos una variable aleatoria X_i de la siguiente forma:

$$X_i \quad = \quad \begin{cases} 1 & R[i] \leq m \\ 0 & R[i] > m \end{cases}$$

Tenemos que:

$$Y_1 \quad = \quad \sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} X_i$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

Dado que la lista L no contiene elementos repetidos tenemos que:

$$\Pr(X_i = 1) \;=\; \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n} \;=\; \frac{\frac{n-1}{2} + 1}{n} \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot n}$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

Dado que la lista L no contiene elementos repetidos tenemos que:

$$\Pr(X_i = 1) \;=\; \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n} \;=\; \frac{\frac{n-1}{2} + 1}{n} \;=\; \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot n}$$

De esto se deduce que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X_i) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot n} \\
\mathrm{Var}(X_i) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot n}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot n}\right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot n^2}
\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

Por lo tanto tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y_1) &= \mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} X_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} \mathrm{E}(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot n}\right) \\
&= \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot n}\right)
\end{aligned}
$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

Para $i, j \in \{1, \ldots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\}$ tal que $i \neq j$ se tiene que X_i es independiente de X_j

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

Para $i, j \in \{1, \ldots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\}$ tal que $i \neq j$ se tiene que X_i es independiente de X_j

Concluimos entonces que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y_1) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} X_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} \mathrm{Var}(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot n^2}\right) \\
&= \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot n^2}\right) \\
&\leq \frac{1}{4} \cdot \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil
\end{aligned}$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

Tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\Pr(Y_1 < \lfloor \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} \rfloor) &\leq \Pr(Y_1 < \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}}) \\
&\leq \Pr(Y_1 < \frac{1}{2} \cdot \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - n^{\frac{1}{2}}) \\
&\leq \Pr(Y_1 < \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot n}) - n^{\frac{1}{2}}) \\
&= \Pr(Y_1 < \mathrm{E}(Y_1) - n^{\frac{1}{2}}) \\
&= \Pr(n^{\frac{1}{2}} < \mathrm{E}(Y_1) - Y_1) \\
&\leq \Pr(|Y_1 - \mathrm{E}(Y_1)| > n^{\frac{1}{2}}) \\
&\leq \Pr(|Y_1 - \mathrm{E}(Y_1)| \geq n^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}
$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev

Por lo tanto, utilizando la desigualdad de Chebyshev concluimos que:

$$
\begin{aligned}
\Pr(Y_1 < \lfloor \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} \rfloor) & \leq & \Pr(|Y_1 - E(Y_1)| \geq n^{\frac{1}{2}}) \\
& \leq & \frac{\mathrm{Var}(Y_1)}{n} \\
& \leq & \frac{1}{4} \cdot \frac{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil}{n} \\
& \leq & \frac{1}{4} \cdot \frac{n^{\frac{3}{4}} + 1}{n} \\
& \leq & \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot n^{\frac{3}{4}}}{n} \\
& = & \frac{1}{2} \cdot n^{-\frac{1}{4}} \\
& \leq & n^{-\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

$\square$

Utilizando nuevamente la desigualdad de Chebyshev

Lema

$$Pr(Y_2 \leq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil) \quad \leq \quad n^{-\frac{1}{4}}$$

Utilizando nuevamente la desigualdad de Chebyshev

Lema

$$Pr(Y_2 \leq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil) \quad \leq \quad n^{-\frac{1}{4}}$$

Demostración. En este caso tenemos que:

$$\begin{aligned} \Pr(Y_2 \leq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil) \quad & \leq \quad \Pr(Y_2 \leq n^{\frac{3}{4}} + 1 - \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}}) \\ & = \quad \Pr(Y_2 \leq \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} + 1) \end{aligned}$$

Utilizando nuevamente la desigualdad de Chebyshev

Al igual que en el caso anterior, para cada $i \in \{1, \ldots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\}$, definimos una variable aleatoria Z_i de la siguiente forma:

$$Z_i = \begin{cases} 1 & R[i] \geq m \\ 0 & R[i] < m \end{cases}$$

Utilizando nuevamente la desigualdad de Chebyshev

Al igual que en el caso anterior, para cada $i \in \{1, \ldots, \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil\}$, definimos una variable aleatoria Z_i de la siguiente forma:

$$Z_i = \begin{cases} 1 & R[i] \geq m \\ 0 & R[i] < m \end{cases}$$

Tenemos que:

$$Y_2 = \sum_{i=1}^{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil} Z_i$$

Utilizando nuevamente la desigualdad de Chebyshev

Como L no contiene elementos repetidos nuevamente obtenemos:

$$\Pr(Z_i = 1) \ = \ \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n} \ = \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot n}$$

Utilizando nuevamente la desigualdad de Chebyshev

Como L no contiene elementos repetidos nuevamente obtenemos:

$$\Pr(Z_i = 1) \ = \ \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{n} \ = \ \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot n}$$

Por lo que como en el caso anterior concluimos que:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z_i) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot n} \\ \mathrm{Var}(Z_i) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot n^2} \end{aligned}$$

Utilizando nuevamente la desigualdad de Chebyshev

Por lo tanto deducimos que:

$$
\begin{aligned}
E(Y_2) &= \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot n} \right) \\
\text{Var}(Y_2) &= \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4 \cdot n^2} \right) \\
&\leq \frac{1}{4} \cdot \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil
\end{aligned}
$$

Utilizando nuevamente la desigualdad de Chebyshev

Finalmente tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\Pr(Y_2 \leq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil) &\leq \Pr(Y_2 \leq \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} - n^{\frac{1}{2}} + 1) \\
&\leq \Pr(Y_2 \leq \frac{1}{2} \cdot \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - n^{\frac{1}{2}} + 1) \\
&\leq \Pr(Y_2 \leq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot n}) - n^{\frac{1}{2}} + 1) \\
&= \Pr(Y_2 \leq \mathrm{E}(Y_2) - n^{\frac{1}{2}} + 1) \\
&= \Pr(n^{\frac{1}{2}} - 1 \leq \mathrm{E}(Y_2) - Y_2) \\
&\leq \Pr(n^{\frac{1}{2}} - (1 - \frac{1}{\sqrt{2}}) \cdot n^{\frac{1}{2}} \leq \mathrm{E}(Y_2) - Y_2) \\
&= \Pr(\sqrt{\frac{n}{2}} \leq \mathrm{E}(Y_2) - Y_2) \\
&\leq \Pr(|Y_2 - \mathrm{E}(Y_2)| \geq \sqrt{\frac{n}{2}})
\end{aligned}
$$

Utilizando nuevamente la desigualdad de Chebyshev

Por lo tanto, utilizando la desigualdad de Chebyshev concluimos que:

$$
\begin{aligned}
\Pr(Y_2 \leq \lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil - \lceil \frac{1}{2} \cdot n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{2}} \rceil) &\leq \Pr(|Y_2 - \mathrm{E}(Y_2)| \geq \sqrt{\frac{n}{2}}) \\
&\leq \frac{\mathrm{Var}(Y_2)}{\frac{n}{2}} \\
&\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{\lceil n^{\frac{3}{4}} \rceil}{\frac{n}{2}} \\
&\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot n^{\frac{3}{4}}}{\frac{n}{2}} \\
&= n^{-\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

□