

IIC2283 — Diseño y Análisis de Algoritmos

Ayudantía 13

Problema 1: Peor caso

Parte 1 Se tiene un algoritmo A , que con entradas de n bits funciona en tiempo promedio n^2 .
Describa una cota superior al costo en el peor caso, considerando entradas del mismo largo.

Idea de solución El tiempo de ejecución de A se representa con una variable aleatoria X , y también, se asume que las entradas siguen una distribución uniforme.

Luego, como hay 2^n entradas posibles, si t fuera tal que

$$\mathbb{P}\{X > t\} < \frac{1}{2^n}$$

entonces para toda entrada se cumple que el tiempo es menor o igual a t , y por lo tanto que el tiempo en el peor caso es a lo más t .

Usando la desigualdad de Markov, se busca t tal que:

$$\mathbb{P}\{X > t\} < \frac{\mathbb{E}[X]}{t} \leq \frac{1}{2^n}$$

donde se concluye que $t \geq 2^n \cdot n^2$.

Parte 2 Generalice el resultado anterior a algoritmos de tiempo promedio T , con N entradas posibles.

Idea de solución En el peor caso, el tiempo es a lo más NT .

Problema 2: Algoritmos Monte Carlo

Definiremos que si n es primo, entonces $\mathbb{F}_n$ representa a los enteros módulo n , con la suma y multiplicación estándar. Por ejemplo, en $\mathbb{F}_5$, se tiene que $2 \cdot 3 = 1$ y que $4 + 3 = 2$.

Parte 1 Si $a, b \in \mathbb{F}_n$ son elegidos de forma uniforme e independiente, entonces definimos las variables aleatorias Y_i como $Y_i = ai + b$.

Demuestre que para todo $i \in \mathbb{F}_n$ la variable Y_i distribuye uniforme en $\mathbb{F}_n$. Además justifique que si $i \neq j$, entonces las variables Y_i e Y_j son independientes.

Idea de solución Si fijamos i y a , entonces por cada b se tiene un valor distinto de $ai + b$, y estos cubren todo $\mathbb{F}_n$. De forma similar, si i y b están fijos, entonces por cada a se cumple que $ai + b$ tiene un valor distinto, y que estos cubren $\mathbb{F}_n$. Luego, para cada Y existen exactamente n pares a, b tales que $ai + b = Y_i$, y cada par tiene la misma probabilidad, por lo que Y_i distribuye uniforme.

Para la independencia se usa un argumento similar. Si se fijan a y b , entonces para todo i , $ai + b$ es distinto, cubriendo $\mathbb{F}_n$.

Todo algoritmo aleatorizado puede representarse con una función con dos parámetros: la entrada x , y la aleatoriedad, que se codifica como un elemento r de $\mathbb{F}_n$, para algún primo n adecuado.

En los algoritmos monte carlo, la función cumple que:

- Si $x \in L$, entonces $A(x, r) = 1$ para al menos la mitad de los elementos de $\mathbb{F}_n$,
- Si $x \notin L$, entonces $A(x, r) = 0$ para todo $r \in \mathbb{F}_n$.

Parte 2 Describa como reducir la probabilidad de error de un algoritmo A , usando dos valores aleatorios, y acote la probabilidad de error en ese caso.

Idea de solución Ejecutando el algoritmo dos veces, con el mismo input, pero con valores aleatorios independientes. En este caso, la probabilidad de error es a lo más $1/4$.

Si los valores aleatorios son a, b , entonces se pueden generar t valores, donde $r_i = ai + b$, con i entre 1 y t . Por la parte 1, esos t valores son independientes a pares, y definen t variables aleatorias $A(x, r_i)$ independientes entre sí.

Parte 3 Si se define la variable $Y = \sum_{i=1}^t A(x, r_i)$, entonces el algoritmo entregará un resultado incorrecto solo cuando $Y = 0$.

Asumiendo que $x \in L$, acote $\mathbb{E}[Y]$ y $\text{var}(Y)$.

Idea de solución Se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^t A(x, r_i)\right] \\ &= \sum_{i=1}^t \mathbb{E}[A(x, r_i)] \\ &\geq t/2\end{aligned}$$

Para la varianza, se tiene que $\text{var}(A(x, r_i)) \leq 1/4$, por que es igual a $p(1-p)$ con $p = \mathbb{P}\{A(x, r_i) = 1\}$. Luego, como las variables son independientes, se obtiene que $\text{var}(Y) = \sum_i \text{var}(A(x, r_i)) \leq t/4$.

Parte 4 Muestre que $\mathbb{P}\{Y = 0\} \leq \mathbb{P}\{|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq t/2\}$

Idea de solución Si $Y = 0$, entonces $|Y - \mathbb{E}[Y]| = t/2 \geq t/2$.

Parte 5 Demuestre que $\mathbb{P}\{Y = 0\} \leq 1/t$.

Solución Usando la desigualdad de Chebyshev, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|Y - \mathbb{E}[Y]| \geq t/2\} &\leq \frac{\text{var}(Y)}{(t/2)^2} \\ &\leq \frac{t/4}{(t/2)^2} \\ &= \frac{1}{t}\end{aligned}$$

Problema 3: Subconjuntos con sumas distintas

Decimos que un conjunto de enteros $S = \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ tiene subconjuntos con sumas distintas, si para todos $S_1, S_2 \subseteq S$ distintos, se cumple que $\sum S_1 \neq \sum S_2$.

A partir de la definición anterior, se define $f(n)$ como el máximo k tal que existe un subconjunto de $\{1, \dots, n\}$ de tamaño k , que tiene subconjuntos con sumas distintas.

Parte 1 Describa un conjunto que cumpla la condición anterior, y úselo para acotar inferiormente $f(n)$.

Idea de solución Las potencias de 2 que sean menores o iguales a n . Esto muestra que $f(n) \geq \lceil \log_2 n \rceil + 1$.

Conjetura (Erdős) Existe una constante C tal que $f(n) \leq \log_2 n + C$.

En adelante se fijará un subconjunto $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ que cumple la propiedad. Luego, se definen variables aleatorias B_i , que toman valor 0 o 1 de forma uniforme e independiente, y con ellas se define la variable X como:

$$X = B_1 \cdot x_1 + \dots + B_k \cdot x_k$$

Parte 2 Calcule el valor de $\mathbb{E}[X]$ y $\text{var}(X)$, y muestre que $\text{var}(X) \leq \frac{n^2 k}{4}$.

Solución Por definición, y usando que las variables son independientes:

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[B_1]x_1 + \dots + \mathbb{E}[B_k]x_k = \frac{x_1 + \dots + x_k}{2}$$

$$\text{var}(X) = \sum_{i=1}^k \text{var}(B_i \cdot x_i)$$

La varianza $\text{var}(B_i \cdot x_i)$ tiene valor

$$\begin{aligned} \text{var}(B_i \cdot x_i) &= \mathbb{E}[(B_i \cdot x_i)^2] - \mathbb{E}[B_i \cdot x_i]^2 \\ &= x_i^2 \cdot \frac{1}{2} - x_i^2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{x_i^2}{4} \end{aligned}$$

por lo que

$$\text{var}(X) = \frac{x_1^2 + \dots + x_k^2}{4}.$$

Todos los elementos x_i son menores o iguales a n , y por lo tanto $\text{var}(X) \leq kn^2/4$.

Parte 3 Demuestre que para todo $\lambda > 1$

$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}[X]| \leq \lambda n \frac{\sqrt{k}}{2}\} \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

Solución Usando Chebyshev, con la constante $\lambda\sqrt{\text{var}(X)}$, se obtiene:

$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda\sqrt{\text{var}(X)}\} \leq \frac{\text{var}(X)}{\lambda^2 \text{var}(X)} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Por otra parte, como $\text{var}(X) \leq kn^2/4$, entonces

$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda n\sqrt{k}/2\} \leq \mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}[X]| \geq \lambda\sqrt{\text{var}(X)}\}$$

y luego

$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}[X]| \leq \lambda n\sqrt{k}/2\} \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

Parte 4 Demuestre que

$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}[X]| \leq \lambda n \frac{\sqrt{k}}{2}\} \leq 2^{-k} \lambda n \sqrt{k}$$

Para eso, considere la cantidad de valores posibles para $X - \mathbb{E}[X]$, y la probabilidad de cada uno.

Idea de solución Por definición de valor absoluto, existen a lo más $\lambda n\sqrt{k}$ valores enteros posibles para $X - \mathbb{E}[X]$. Además como el conjunto tiene subconjuntos con sumas distintas, para cada uno de ellos existe una única asignación de valores a $B_1, \dots, B_k$, y por lo tanto para cada t , $\mathbb{P}\{X = t\}$ es 2^{-k} o 0.

Parte 5 Demuestre que

$$n \geq \frac{2^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1 - \lambda^{-2}}{\lambda}$$

Idea de solución Juntando las 2 desigualdades anteriores, se concluye que:

$$1 - \frac{1}{\lambda^2} \leq 2^{-k} \lambda n \sqrt{k}$$

Parte 6 Demuestre que

$$f(n) \leq \log_2 n + \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + O(1)$$

Solución Se fija un subconjunto $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ con sumas distintas, de tamaño $f(n)$. Luego, como todos los subconjuntos tienen sumas distintas, y la suma de cada uno es a lo más kn , se tiene que

$$2^{f(n)} \leq nk.$$

Además, como $f(n)$ representa el tamaño de un subconjunto de $\{1, \dots, n\}$, entonces $f(n) \leq n$, y por lo tanto

$$2^{f(n)} \leq n^2$$

De la parte anterior, y usando $k = f(n)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{2^{f(n)}}{\sqrt{f(n)}} \cdot \frac{1 - \lambda^{-2}}{\lambda} \\ n &\geq \frac{2^{f(n)}}{\sqrt{f(n)}} \cdot C^{-1} \\ nC\sqrt{f(n)} &\geq 2^{f(n)} \\ f(n) &\leq \log(n) + \frac{1}{2} \log(f(n)) + O(1) \end{aligned}$$

Luego, se usa que $2^{f(n)} \leq n^2$ para mostrar que $\log(f(n)) \leq \log \log(n) + \log(2)$, y al reemplazar:

$$f(n) \leq \log(n) + \frac{1}{2} \log(f(n)) + O(1) \leq \log(n) + \frac{1}{2} \log \log(n) + O(1)$$