



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERIA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213
Interrogación 1

1. En esta pregunta debe considerar la lógica proposicional extendida con los símbolos $\top$ y $\perp$, para los cuales se tiene que $\sigma(\top) = 1$ y $\sigma(\perp) = 0$ para cualquier valuación σ . Así, por ejemplo, la fórmula $(p \vee \perp)$ es equivalente a p , y la fórmula $(p \vee \top)$ es equivalente a $\top$. Además, suponga que todas las fórmulas son construidas desde el conjunto P de variables proposicionales.

- (a) [0.3 puntos] Sea p una variable proposicional y α una fórmula proposicional arbitraria. Defina recursivamente la función $\mathcal{T}_{p \mapsto \alpha}(\varphi)$, la cual a partir de φ genera una fórmula ψ reemplazando cada ocurrencia de la variable proposicional p por α . Por ejemplo, $\mathcal{T}_{p \mapsto (\neg r \wedge s)}(p \vee q) = ((\neg r \wedge s) \vee q)$ y $\mathcal{T}_{p \mapsto (\neg r \wedge s)}(r \vee q) = (r \vee q)$.
- (b) [0.3 puntos] Demuestre que para cada fórmula proposicional φ y cada variable proposicional p mencionada en φ , se tiene que:

$$\{\varphi\} \models \mathcal{T}_{p \mapsto \top}(\varphi) \vee \mathcal{T}_{p \mapsto \perp}(\varphi)$$

- (c) [0.3 puntos] De fórmulas proposicionales φ y ψ para las cuales se tiene que $\{\varphi\} \models \psi$ y existe una variable proposicional p mencionada en φ tal que:

$$\{\mathcal{T}_{p \mapsto \top}(\varphi) \vee \mathcal{T}_{p \mapsto \perp}(\varphi)\} \not\models \psi$$

- (d) [0.3 puntos] Suponga que φ y ψ son dos fórmulas proposicionales arbitrarias, y p es una variable proposicional mencionada en φ . Demuestre que si $\{\varphi\} \models \psi$ y p no es mencionada en ψ , entonces se tiene que:

$$\{\mathcal{T}_{p \mapsto \top}(\varphi) \vee \mathcal{T}_{p \mapsto \perp}(\varphi)\} \models \psi$$

- (e) [0.8 puntos] Utilizando los resultados anteriores, demuestre que para cada par de fórmulas proposicionales φ y ψ tales que $\{\varphi\} \models \psi$, existe una fórmula proposicional θ tal que: $\{\varphi\} \models \theta$, $\{\theta\} \models \psi$ y cada variable proposicional mencionada en θ es mencionada tanto en φ como en ψ . Por ejemplo, si $\varphi = (p \wedge q)$ y $\psi = (p \vee r)$, entonces $\theta = p$ satisface las condiciones anteriores.

2. Suponga que Σ_1 y Σ_2 son conjuntos arbitrarios de fórmulas proposicionales tales que $\Sigma_1 \neq \emptyset$, $\Sigma_2 \neq \emptyset$ y $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$.

- (a) [0.8 puntos] Demuestre que si Σ_1 es finito, entonces existe $\Sigma'_2 \subseteq \Sigma_2$ tal que $\Sigma'_2 \neq \emptyset$, Σ'_2 es finito y $\Sigma_1 \equiv \Sigma'_2$.
- (b) [1.2 puntos] Demuestre o de un contraejemplo para la siguiente afirmación: si Σ_1 y Σ_2 son infinitos, entonces existen $\Sigma'_1 \subseteq \Sigma_1$ y $\Sigma'_2 \subseteq \Sigma_2$ tales que $\Sigma'_1 \neq \emptyset$, Σ'_1 es finito, $\Sigma'_2 \neq \emptyset$, Σ'_2 es finito y $\Sigma'_1 \equiv \Sigma'_2$.

3. Recuerde que decimos que un algoritmo es eficiente si el número de pasos ejecutado por el algoritmo es n^c cuando la entrada tiene largo n , donde c es una constante.

- (a) [0.5 puntos] Decimos que una fórmula proposicional φ es no-trivial si existen valuaciones σ_1 y σ_2 tales que $\sigma_1(\varphi) = 0$ y $\sigma_2(\varphi) = 1$.

Encuentre un algoritmo eficiente que dada una fórmula proposicional φ , construya una fórmula proposicional ψ tal que φ es no-trivial si y sólo si ψ es satisfacible.

- (b) [1.5 puntos] Decimos que una fórmula proposicional φ es balanceada si el número n de variables proposicionales mencionadas en φ es par, y existe una valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$ y

$$|\{p \mid p \text{ es una variable proposicional mencionada en } \varphi \text{ y } \sigma(p) = 1\}| = \frac{n}{2}$$

Por ejemplo, $(p \vee q)$ es una fórmula proposicional balanceada, mientras que $(p \vee q \vee r)$ y $(p \wedge q)$ no lo son. Encuentre un algoritmo eficiente que dada una fórmula proposicional φ , construya una fórmula proposicional ψ tal que φ es balanceada si y sólo si ψ es satisfacible.