



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERIA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213
Examen

1. [1.5 puntos] Sea $w = a_1 \cdots a_n$ ($n \geq 1$) una palabra en $\{0, 1\}^*$. La representación de w como fórmula proposicional se define como :

$$\Phi_w = \left(\bigwedge_{i \in \{1, \dots, n\} : a_i = 1} x_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{j \in \{1, \dots, n\} : a_j = 0} \neg x_j \right).$$

Por ejemplo, si $w = 1001$, entonces Φ_w es la fórmula $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4$.

Un autómata determinista $\mathcal{A}$ es una tupla (Q, q_0, δ, F) , donde Q es un conjunto finito de estados, $q_0 \in Q$ es el estado inicial de $\mathcal{A}$, $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales de $\mathcal{A}$ y $\delta : Q \times \{0, 1\} \rightarrow Q$ es la función de transición del autómata. Dada una palabra $w = a_1 \cdots a_n$ ($n \geq 1$) en $\{0, 1\}^*$, la ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w se define como una función $\rho : \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow Q$ tal que $\rho(0) = q_0$ y $\rho(i+1) = \delta(\rho(i), a_{i+1})$. Además, decimos que $\mathcal{A}$ acepta w si y sólo si $\rho(n) \in F$.

Sea $\mathcal{A}$ un autómata determinista fijo. Dado $n \geq 1$, en esta pregunta usted debe construir una fórmula proposicional $\Psi_{n, \mathcal{A}}$ tal que para toda palabra $w \in \{0, 1\}^*$ de largo n , se tiene que: $(\Phi_w \wedge \Psi_{n, \mathcal{A}})$ es satisfacible si y sólo si $\mathcal{A}$ acepta w .

Importante: La fórmula $\Psi_{n, \mathcal{A}}$ debe ser de tamaño polinomial en n , vale decir, debe existir un polinomio p tal que $\text{la}(\Psi_{n, \mathcal{A}}) \leq p(n)$, donde $\text{la}(\alpha)$ es el largo de una fórmula α .

2. [1.5 puntos] Sea $F = \{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{existe } a \in \mathbb{N} \text{ tal que } a|n \text{ y } 1 < a \leq k\}$, y sea $\overline{F}$ el complemento de F , vale decir, $\overline{F} = \{(n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \text{no existe } a \in \mathbb{N} \text{ tal que } a|n \text{ y } 1 < a \leq k\}$. Demuestre que $F \in \text{NP}$ y $\overline{F} \in \text{NP}$.
3. [1.5 puntos] Sea $\mathcal{L} = \{+, \cdot, <\}$ y $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $+^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}$ y $<^{\mathfrak{A}}$ son la suma, multiplicación y orden usual para los números enteros, respectivamente. Usando la noción de reducción demuestre que $\text{Th}(\mathfrak{A})$ es indecidible.
4. [1.5 puntos] Sea $\mathcal{L} = \{+\}$ y $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $+^{\mathfrak{A}}$ es la suma usual sobre los números naturales. Demuestre que la teoría $\text{Th}(\mathfrak{A})$ no admite eliminación de cuantificadores.