



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213
Interrogación 3

1. Sea $V = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto infinito de variables y $p \geq 2$ un número natural. Una expresión aritmética sobre p es definida recursivamente de la siguiente forma:

- cada $q \in \{0, \dots, p-1\}$ es una expresión aritmética sobre p ;
- cada $x_i \in V$ es una expresión aritmética sobre p ; y
- si E_1, E_2 son expresiones aritméticas sobre p , entonces $(E_1 + E_2)$ y $(E_1 \cdot E_2)$ son expresiones aritméticas sobre p .

Por ejemplo, $(x_1 + 1)$ y $((x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3))$ son expresiones aritméticas sobre p . Una valuación sobre p es una función $\sigma : V \rightarrow \{0, \dots, p-1\}$. Dada una expresión aritmética E sobre p y una valuación σ sobre p , el valor de E dado σ , denotado como $\text{valor}(E, \sigma)$, es definido recursivamente de la siguiente forma:

- si $E = q$, con $q \in \{0, \dots, p-1\}$, entonces $\text{valor}(E, \sigma) = q$;
- si $E = x_i$, con $x_i \in V$, entonces $\text{valor}(E, \sigma) = \sigma(x_i)$;
- si $E = (E_1 + E_2)$, donde E_1, E_2 son expresiones aritméticas, entonces $\text{valor}(E, \sigma) = \text{valor}(E_1, \sigma) + \text{valor}(E_2, \sigma)$; y
- si $E = (E_1 \cdot E_2)$, donde E_1, E_2 son expresiones aritméticas, entonces $\text{valor}(E, \sigma) = \text{valor}(E_1, \sigma) \cdot \text{valor}(E_2, \sigma)$.

Por ejemplo, si $E = ((x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3))$, $\sigma(x_1) = 0$, $\sigma(x_2) = 2$ y $\sigma(x_3) = 1$, entonces $\text{valor}(E, \sigma) = 2$. En este problema usted debe responder las siguientes preguntas.

(a) [1.5 puntos] Defina el lenguaje L_1 de la siguiente forma:

$$L_1 = \{(E_1, E_2, p) \mid p \in \mathbb{N}, p \text{ es primo}, E_1, E_2 \text{ son expresiones aritméticas sobre } p \text{ y existe una valuación } \sigma \text{ sobre } p \text{ tal que } \sigma(E_1) \equiv 0 \pmod{p} \text{ y } \sigma(E_2) \equiv 0 \pmod{p}\}.$$

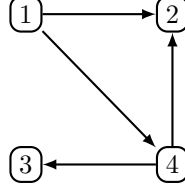
Demuestre que el lenguaje L_1 es NP-completo.

(b) [0.6 puntos] Defina el lenguaje L_2 de la siguiente forma:

$$L_2 = \{(E, p) \mid p \in \mathbb{N}, p \text{ es primo}, E \text{ es una expresión aritmética sobre } p \text{ y existe una valuación } \sigma \text{ sobre } p \text{ tal que } \sigma(E) \equiv 0 \pmod{p}\}.$$

Demuestre que L_2 es NP-hard construyendo una reducción polinomial de L_1 a L_2 .

2. [1.3 puntos] Demuestre que existe una función f tal que: (1) dado un grafo G , $f(G)$ es una fórmula proposicional que satisface que G es 3-coloreable si y sólo si $f(G)$ es satisfacible; y (2) f es calculable en espacio logarítmico. Para resolver esta pregunta, suponga que dado un grafo $G = (N, A)$, donde $N = \{1, \dots, n\}$, se define la palabra $w(i, G)$ ($1 \leq i \leq n$) como $a_1 \dots a_n$, donde $a_j = 1$ ($1 \leq j \leq n$) si $(i, j) \in A$, y $a_j = 0$ en caso contrario. Además, suponga que $w(G) = 0^n 1 w(1, G) \dots w(n, G)$. Por ejemplo, si G es el siguiente grafo:



se tiene que $w(G) = 000010101000000000110$. Entonces la función f que usted debe construir debe recibir como entrada $w(G)$, y debe retornar una fórmula que es representada por una palabra sobre un alfabeto (finito) que usted debe definir.

3. [1.3 puntos] Sea $\mathcal{L} = \{+\}$, $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $+^{\mathfrak{A}}$ es interpretado como la suma sobre los números naturales, y $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, +^{\mathfrak{B}} \rangle$, donde $+^{\mathfrak{B}}$ es interpretado como la suma por componentes de los pares de números naturales. Vale decir, para cada $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene que $(a, b) +^{\mathfrak{B}} (c, d) = (a +^{\mathfrak{A}} c, b +^{\mathfrak{A}} d)$.

Construya una $\mathcal{L}$ -oración φ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$ y $\mathfrak{B} \not\models \varphi$.

4. [1.3 puntos] Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N} \times \mathbb{N}, <^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $<^{\mathfrak{A}}$ es interpretada como el orden lexicográfico sobre los pares de números naturales, vale decir, para cada $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene que $(a, b) <^{\mathfrak{A}} (c, d)$ si y sólo si $(a < c)$ o $(a = c \text{ y } b < d)$. Además, sea $\mathfrak{B} = \langle \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, <^{\mathfrak{B}} \rangle$, donde $<^{\mathfrak{B}}$ es interpretada como el orden lexicográfico sobre los trios de números naturales, vale decir, para cada $(a, b, c), (d, e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se tiene que $(a, b, c) <^{\mathfrak{B}} (d, e, f)$ si y sólo si $(a < d)$ o $(a = d \text{ y } b < e)$ o $(a = d, b = e \text{ y } c < f)$.

Demuestre que las estructuras $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ no son isomorfas.