



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERIA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213
Interrogación 2

1. [1.5 puntos] Dado $w \in \{0, 1\}^*$, sea w^r el inverso de w . Por ejemplo, $(01101)^r = 10110$ y $(111000)^r = 000111$. Construya una máquina de Turing determinista que acepte el lenguaje

$$L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = w^r\}.$$

2. Suponga que los lenguajes considerados en esta pregunta son definidos sobre el alfabeto $\{0, 1\}^*$.
- (a) [0.5 puntos] Demuestre que si L_1 y L_2 son lenguajes decidibles, entonces $L_1 \cup L_2$ y $L_1 \cap L_2$ son lenguajes decidibles.
 - (b) [0.5 puntos] Suponga que tiene una secuencia infinita $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de lenguajes decidibles. ¿Es cierto que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ es un lenguaje decidable? Demuestre o de un contraejemplo.
 - (c) [0.5 puntos] Suponga que tiene una secuencia infinita $\{L_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de lenguajes decidibles. ¿Es cierto que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} L_i$ es un lenguaje decidable? Demuestre o de un contraejemplo.
3. Dado un conjunto de variables $\{X_1, \dots, X_n\}$ con $n \geq 1$, el conjunto de las C -expresiones sobre $\{X_1, \dots, X_n\}$ se define como el menor conjunto A tal que:
- $X_i \in A$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$; y
 - si $\varphi \in A$ y $\psi \in A$, entonces $(\varphi \cap \psi) \in A$ y $(\varphi \cup \psi) \in A$.

Por ejemplo X_3 , $(X_1 \cap X_2)$ y $((X_1 \cup X_2) \cap X_3)$ son C -expresiones sobre $\{X_1, X_2, X_3\}$.

Una valuación para $\{X_1, \dots, X_n\}$ es una función σ tal que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que $\sigma(X_i) = L(M_i)$, donde M_i es una máquina de Turing determinista. Dada una valuación σ para $\{X_1, \dots, X_n\}$ y una C -expresión φ sobre $\{X_1, \dots, X_n\}$, el valor dado por σ a φ , denotado como $\text{valor}(\sigma, \varphi)$, se define recursivamente de la siguiente forma:

- si $\varphi = X_i$ ($1 \leq i \leq n$), entonces $\text{valor}(\sigma, \varphi) = \sigma(X_i)$;
- si $\varphi = (\alpha \cap \beta)$, entonces $\text{valor}(\sigma, \varphi) = \text{valor}(\sigma, \alpha) \cap \text{valor}(\sigma, \beta)$; y
- si $\varphi = (\alpha \cup \beta)$, entonces $\text{valor}(\sigma, \varphi) = \text{valor}(\sigma, \alpha) \cup \text{valor}(\sigma, \beta)$.

En esta pregunta usted debe resolver los siguientes problemas referidos a los conceptos anteriores. Para esto suponga que todas las máquina de Turing utilizadas están definidas sobre el alfabeto $\{0, 1\}$.

- (a) [1.0 punto] Sea φ una C -expresión sobre el conjunto de variables $\{X_1, \dots, X_n\}$ ($n \geq 1$), y sea L_φ es siguiente lenguaje:

$$\{(w, C(M_1), \dots, C(M_n)) \mid \text{existe una valuación } \sigma \text{ para } \{X_1, \dots, X_n\} \\ \text{tal que } \sigma(X_i) = L(M_i) \text{ para cada } i \in \{1, \dots, n\}, \text{ y } w \in \text{valor}(\sigma, \varphi)\}.$$

Demuestre que L_φ es un lenguaje indecidible.

- (b) [0.5 puntos] Suponga que el conjunto de C -expresiones es extendido de la siguiente forma. Dado un conjunto de variables $\{X_1, \dots, X_n\}$ con $n \geq 1$, el conjunto de las EC -expresiones sobre $\{X_1, \dots, X_n\}$ se define como el menor conjunto A tal que:

- $X_i \in A$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$;
- si $\varphi \in A$, entonces $\bar{\varphi} \in A$; y
- si $\varphi \in A$ y $\psi \in A$, entonces $(\varphi \cap \psi) \in A$ y $(\varphi \cup \psi) \in A$.

Dada una valuación σ para $\{X_1, \dots, X_n\}$ y una EC -expresión φ sobre $\{X_1, \dots, X_n\}$, suponga que $valor(\sigma, \varphi)$ se define recursivamente de la siguiente forma:

- si $\varphi = X_i$ ($1 \leq i \leq n$), entonces $valor(\sigma, \varphi) = \sigma(X_i)$;
- si $\varphi = \bar{\alpha}$, entonces $valor(\sigma, \varphi) = \{0, 1\}^* \setminus valor(\sigma, \alpha)$.
- si $\varphi = (\alpha \cap \beta)$, entonces $valor(\sigma, \varphi) = valor(\sigma, \alpha) \cap valor(\sigma, \beta)$; y
- si $\varphi = (\alpha \cup \beta)$, entonces $valor(\sigma, \varphi) = valor(\sigma, \alpha) \cup valor(\sigma, \beta)$.

Finalmente, suponga que φ es una EC -expresión sobre el conjunto de variables $\{X_1, \dots, X_n\}$ ($n \geq 1$), y suponga que L_φ es definido como en la pregunta (a). ¿Es cierto que L_φ es indecidible? Demuestre o de un contraejemplo.

4. [1.5 puntos] Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $0 < c < 1$, y sea L_A^c el siguiente lenguaje:

$$L_A^c = \{x \in \{0, 1\}^* \mid K_A(x) > c \cdot |x|\}.$$

Demuestre que L_A^c es indecidible.