



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213
Interrogación 3

1. [1.5 puntos] Decimos que un vocabulario $\mathcal{L}$ es relacional si $\mathcal{L} = \{R_1, \dots, R_n\}$, donde cada R_i ($1 \leq i \leq n$) es un símbolo de relación con aridad mayor a cero. Dadas dos estructuras $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ sobre el mismo vocabulario relacional y con dominios A_1 y A_2 , respectivamente, decimos que $\mathfrak{A}_1$ está contenida en $\mathfrak{A}_2$, denotado como $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$, si $A_1 \subseteq A_2$ y para cada $R \in \mathcal{L}$ se tiene que $R^{\mathfrak{A}_1} \subseteq R^{\mathfrak{A}_2}$. Finalmente, dada una fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ en lógica de primer orden (LPO) tal que $k \geq 1$ y $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ está definida sobre un vocabulario relacional $\mathcal{L}$, decimos que $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ es monótona si para cada par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ tales que $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$, se tiene que:

$$\{(a_1, \dots, a_k) \mid \mathfrak{A}_1 \models \varphi(a_1, \dots, a_k)\} \subseteq \{(a_1, \dots, a_k) \mid \mathfrak{A}_2 \models \varphi(a_1, \dots, a_k)\}.$$

Por ejemplo, si $\mathcal{L} = \{P(\cdot)\}$, $\varphi(x_1) = P(x_1)$ y $\psi(x_1) = \neg P(x_1)$, se tiene que $\varphi(x_1)$ es monótona, mientras que $\psi(x_1)$ no lo es. En esta pregunta usted debe demostrar que el siguiente lenguaje es indecidible:

$$\text{MON} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una fórmula en LPO monótona sobre un vocabulario relacional}\}.$$

2. Resuelva los siguientes problemas.

- a) [0.7 puntos] Demuestre que -1 es definible en LPO en la estructura $\langle \mathbb{C}, \cdot \rangle$.
b) [0.8 puntos] Demuestre que $i = \sqrt{-1}$ no es definible en LPO en la estructura $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$.

3. [1.5 puntos] Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$ y $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$ -estructura con dominio A finito. En esta pregunta usted debe demostrar que para cada $a \in A$ se cumple que:

a es definible en LPO en $\mathfrak{A}$ si y sólo si para cada isomorfismo f de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}$, se tiene que $f(a) = a$.

4. [1.5 puntos] Recuerde que decimos que una estructura $\mathfrak{A}$ es un modelo de una fórmula φ en LPO si $\mathfrak{A} \models \varphi$, y decimos que $\mathfrak{A}$ es un modelo finito (infinito) si además su dominio es finito (infinito). Demuestre que si una oración φ en LPO tiene modelos finitos arbitrariamente grandes, entonces tiene un modelo infinito.