



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERIA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213 Interrogación 3

1. Una fórmula φ en lógica de primer orden está en Forma Normal Prenex (FNP) si:

$$\varphi = Q_1 x_1 \cdots Q_k x_k \psi,$$

donde $Q_i = \exists$ o $Q_i = \forall$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, y ψ es una fórmula sin cuantificadores. Por ejemplo, la fórmula $\forall x \exists y (R(x, y) \wedge \neg T(y, x, z))$ está en FNP, mientras que la fórmula $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y R(x, y))$ no lo está.

Sea Φ la oración:

$$\neg \left[\left(\left(\exists x \exists y (R(x, y) \wedge \neg S(y, x)) \right) \wedge \left(\forall x ((\exists y R(x, y)) \rightarrow (\exists y S(x, y))) \right) \right) \leftrightarrow \left(\forall x \exists z (R(x, z) \vee \forall y (S(x, y) \wedge R(z, y))) \right) \right].$$

Construya una oración Ψ en FNP que sea equivalente a Φ .

2. [1.5 puntos] Sea $\mathcal{L}$ el vocabulario $\{D_k \mid k \text{ es un número natural primo}\}$, y sea $\mathfrak{A}$ la $\mathcal{L}$ -estructura:

$$\mathfrak{A} = \langle A, D_2^{\mathfrak{A}}, D_3^{\mathfrak{A}}, D_5^{\mathfrak{A}}, D_7^{\mathfrak{A}}, \dots \rangle,$$

donde $A = \mathbb{N}$ y para número primo k , se tiene que $D_k^{\mathfrak{A}}$ es el conjunto de todos los múltiplos de k (por ejemplo, $D_2^{\mathfrak{A}} = \{0, 2, 4, \dots\}$ es el conjunto de los números pares, y $D_3^{\mathfrak{A}} = \{0, 3, 6, \dots\}$ es el conjunto de los múltiplos de 3).

Sea c un número natural mayor o igual a 2. En esta pregunta usted debe demostrar que el elemento c no es definible en $\mathfrak{A}$, vale decir, debe demostrar que el conjunto $S = \{c\}$ no es definible en la estructura $\mathfrak{A}$ a través de una fórmula en lógica de primer orden.

Importante: Recuerde que el menor número primo es el 2.

3. [1.5 puntos] Un grafo $G = (N, A)$ se dice de *grado finito* si existe un número natural k tal que para todo $a \in N$:

$$|\{b \mid (b, a) \in A\}| \leq k \quad \text{y} \quad |\{b \mid (a, b) \in A\}| \leq k.$$

Sea $\mathcal{L}$ el vocabulario $\{E\}$, donde E es una relación binaria, y $\mathcal{P}_{\text{GF}}$ la siguiente propiedad sobre las $\mathcal{L}$ -estructuras:

$$\mathcal{P}_{\text{GF}} = \{\mathfrak{A} \mid \text{el grafo representado por la } \mathcal{L}\text{-estructura } \mathfrak{A} \text{ es de grado finito}\}.$$

Demuestre que $\mathcal{P}_{\text{GF}}$ no es expresable en lógica de primer orden.

4. [1.5 puntos] Sea $\mathcal{L}$ el vocabulario $\{E\}$, donde E es una relación binaria, y $\mathcal{P}_{\text{PAR}}$ la siguiente propiedad de las $\mathcal{L}$ -estructuras:
- Para cada $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ con dominio finito: $\mathfrak{A} \in \mathcal{P}_{\text{PAR}}$ si y sólo si el dominio de $\mathfrak{A}$ tiene un número par de elementos.

Nótese que $\mathcal{P}_{\text{PAR}}$ es definido de manera arbitraria sobre las estructuras con dominio infinito. Demuestre que $\mathcal{P}_{\text{PAR}}$ no es definible en lógica de primer orden.