



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213
Interrogación 1

1. [1 punto] Sea $P = \{p, q\}$ y defina $\text{largo}(\alpha)$ como el largo de la fórmula proposicional α , para cada $\alpha \in L(P)$. Además, defina el conjunto de números naturales LARGO de la siguiente forma:

$$\text{LARGO} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{existe una fórmula } \beta \in L(P) \text{ tal que } \text{largo}(\beta) = n\}.$$

Demuestre que $\text{LARGO} = \{1, 4, 5\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 7\}$.

2. [0,5 puntos] Sea EQ un conectivo ternario definido como $\text{EQ}(p, q, r) = 1$ si y sólo si $3 \cdot p - 2 \cdot (q + r) \geq 0$. Defina el conectivo EQ utilizando los conectivos $\wedge$, $\vee$ y $\neg$.
3. [1 punto] Un conjunto Σ de fórmulas proposicionales se dice *redundante* si existe una fórmula $\varphi \in \Sigma$ tal que $\Sigma \setminus \{\varphi\} \models \varphi$. Además, Σ se dice *fuertemente redundante*, si para cada $\Sigma' \subseteq \Sigma$ tal que Σ y Σ' son equivalentes, se tiene que Σ' es redundante. Construya un conjunto de fórmulas que sea fuertemente redundante.
4. [0.5 puntos] Sea Σ un conjunto satisfacible de fórmulas proposicionales, y φ una fórmula proposicional. Además, suponga que Σ y φ no tienen variables proposicionales en común. ¿Es cierto que $\Sigma \not\models \varphi$? Demuestre o de un contraejemplo.
5. [1 punto] La siguiente es una tautología generada utilizando el segundo esquema en el sistema de Hilbert:

$$((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))).$$

Utilizando resolución demuestre que esta fórmula es efectivamente una tautología.

6. [2 puntos] Dado un grafo $G = (N, A)$, una secuencia de nodos $(a_1, \dots, a_n)$ es un *camino en G* si para todo $i \in [1, n-1]$ se tiene que $(a_i, a_{i+1}) \in A$. Decimos que G contiene un *circuito Hamiltoniano* si existe un camino $(a_1, \dots, a_n)$ en G tal que:

- n es el número de nodos de N ,
- $a_i \neq a_j$ para cada $i, j \in [1, n-1]$ tales que $i \neq j$,
- $(a_n, a_1) \in A$.

Encuentre un algoritmo eficiente que dado un grafo G , construya una fórmula proposicional φ tal que G contiene un circuito Hamiltoniano si y sólo si φ es satisfacible.

Nota: Recuerde que decimos que un algoritmo es eficiente si el número de pasos ejecutado por el algoritmo es n^k cuando la entrada tiene largo n , donde k es una constante. Por ejemplo, un algoritmo que funciona en tiempo n^3 es eficiente mientras que un algoritmo que funciona en tiempo 2^n o $n!$ no lo es.