



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERIA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2212 Interrogación 3

Problema 1 [1.6 puntos]

Sea R una relación k -aria, donde $k \geq 2$. La forma más común de restricciones de integridad en una base de datos son las dependencias funcionales, las cuales son definidas sobre una relación. Formalmente, una dependencia funcional sobre R es una expresión de la forma $X \rightarrow Y$, donde $X, Y \subseteq \{1, \dots, k\}$. Una instancia de la relación R satisface $X \rightarrow Y$ si para cada par de filas t_1 y t_2 en la instancia, se tiene que si los valores de t_1 y t_2 son los mismos en las posiciones mencionadas en X , entonces son los mismos en las posiciones mencionadas en Y . Por ejemplo, las siguientes son dos instancias de una relación ternaria T :

T			T		
a	b	c	a	b	e
a	b	d	a	c	f
e	f	g	b	a	a

La instancia de la izquierda satisface la dependencia funcional $\{1\} \rightarrow \{2\}$, mientras que la de la derecha no la satisface.

- [0.6 puntos] Muestre como se puede representar una dependencia funcional $X \rightarrow Y$ sobre una relación k -aria R en lógica de primer orden. Aplique su metodología para la dependencia $\{1\} \rightarrow \{2\}$ sobre una relación ternaria T .
- [1 punto] Existe un sistema de reglas de inferencias para las dependencias funcionales que es correcto y completo, el sistema de Armstrong. Una de las reglas en este sistema indica que de $X \rightarrow Y$ y $Y \rightarrow Z$, se puede deducir $X \rightarrow Z$. Demuestre que esta regla es correcta usando lógica de primer orden y su representación de dependencias funcionales en la parte (a).

Problema 2 [1.5 puntos]

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario que sólo contiene relaciones. Una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ está contenida en una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{B}$ (denotado como $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$), si el dominio A de $\mathfrak{A}$ está contenido en el dominio B de $\mathfrak{B}$ y para cada relación R en $\mathcal{L}$, se tiene que $R^A \subseteq R^B$.

Un $\mathcal{L}$ -oración φ en lógica de primer orden es *monótona* si para cada par de $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, se tiene que si $\mathfrak{A} \models \varphi$ y $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, entonces $\mathfrak{B} \models \varphi$. Por ejemplo, la fórmula $\exists x P(x)$ es monótona, mientras que la fórmula $\forall x P(x)$ no lo es. Defina el lenguaje $\text{MON}[\mathcal{L}]$ de la siguiente forma:

$$\text{MON}[\mathcal{L}] = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración monótona}\}.$$

Demuestre que existe un vocabulario $\mathcal{L}$ para el cual $\text{MON}[\mathcal{L}]$ no es decidible.

Problema 3 [1.4 puntos]

- (a) [0.7 puntos] ¿Es posible definir la constante 2 en $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$?
- (b) [0.7 puntos] Sea P el conjunto de todos los números primos. ¿Es P definible en $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$?

Problema 4 [1.5 puntos]

Sean Σ_1 y Σ_2 dos conjuntos infinitos de $\mathcal{L}$ -oraciones tales que $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ no es satisfacible. Usando el teorema de compacidad, demuestre que existe una $\mathcal{L}$ -oración φ tal que $\Sigma_1 \models \varphi$ y $\Sigma_2 \models \neg\varphi$.