



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2212
Examen

Problema 1 [2 puntos]

- (a) [0.2 puntos] Enuncie el teorema de compacidad para la lógica proposicional.
- (b) [0.2 puntos] ¿Por qué se cree que las máquinas de Turing caracterizan exactamente la noción de algoritmo?
- (c) [0.2 puntos] Dé un problema indicible.
- (d) [0.2 puntos] Enuncie el teorema de Cook.
- (e) [0.2 puntos] Dé dos problemas NP-completos distintos de SAT.
- (f) [0.2 puntos] ¿Por qué sólo nos basta con reducir SAT a un problema L para demostrar que L es NP-hard?
- (g) [0.2 puntos] De una subclase (no trivial) de SAT que pueda ser resuelta en tiempo polinomial.
- (h) [0.2 puntos] Enuncie el teorema de Church.
- (i) [0.2 puntos] Dé la idea de la demostración del teorema de Church.
- (j) [0.2 puntos] Enuncie el teorema de isomorfismo (versión fuerte).

Problema 2 [1 punto]

Sea $\mathcal{L} = \{L(\cdot, \cdot)\}$ y $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ las siguientes $\mathcal{L}$ -oraciones:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \forall x \neg L(x, x), \\ \varphi_2 &= \forall x \forall y \forall z ((L(x, y) \wedge L(y, z)) \rightarrow L(x, z)), \\ \varphi_3 &= \forall x \forall y (x = y \vee L(x, y) \vee L(y, x)), \\ \varphi_4 &= \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \forall y (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3)).\end{aligned}$$

- (a) [0.5 puntos] ¿Es cierto que todas las $\mathcal{L}$ -estructuras que satisfacen $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ son isomorfas? Justifique su respuesta.
- (b) [0.5 puntos] ¿Es cierto que todas las $\mathcal{L}$ -estructuras que satisfacen $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$ son isomorfas? Justifique su respuesta.

Problema 3 [2 puntos]

- (a) [1 punto] Demuestre que el conjunto $S = \mathbb{N}$ no es definible en $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.
- (b) [1 punto] ¿Es la función $+$ definible en $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$? Recuerde que cada número en $\mathbb{Q}$ puede representarse como $\frac{m}{n}$, donde $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Problema 4 [1 punto]

Decimos que un grafo $G = (N, A)$ contiene un ciclo finito si existen nodos $a_1, \dots, a_n \in N$ ($n \geq 2$) tal que para todo $i \in [1, n-1]$ se tiene que $(a_i, a_{i+1}) \in A$ y además $(a_n, a_1) \in A$.

Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$. Demuestre que no existe una $\mathcal{L}$ -oración φ tal que para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ se tiene que: $\mathfrak{A}$ contiene un ciclo finito si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.