



Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2212
Interrogación 2

Problema 1 [2 puntos]

Indique si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

- (a) [0.5 puntos] Si L_1 y L_2 son dos lenguajes decidibles, entonces $L_1 \cup L_2$ es decidible.
- (b) [0.5 puntos] Si $L_1 \cup L_2$ es decidible, entonces L_1 y L_2 son decidibles.
- (c) [0.5 puntos] Si L_1 es un lenguaje decidible y $L_2 \subseteq L_1$, entonces L_2 es decidible.
- (d) [0.5 puntos] El lenguaje $L = \{x \in \{0,1\}^* \mid K_A(x) \leq 1000\}$ es indecidible.

Problema 2 [2 puntos]

Sea $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{el largo de } w \text{ es divisible por } 2 \text{ ó } 3\}$. Construya una máquina de Turing que acepte L y que sólo mueva su cabeza a la derecha.

Problema 3 [1 punto]

Usando una reducción, demuestre que el siguiente lenguaje no es decidible:

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{existen máquinas de Turing } M_1 \text{ y } M_2 \text{ tales que} \\ w = C(M_1)0000C(M_2) \text{ y } L(M_1) \subseteq L(M_2)\}.$$

Problema 4 [1 punto]

Recuerde que dado $L \subseteq \{0,1\}^*$, el complemento de L se define como $\bar{L} = \{0,1\}^* \setminus L$. Demuestre que existe un lenguaje $L \subseteq \{0,1\}^*$ tal que L no es aceptado por ninguna máquina de Turing y $\bar{L}$ tampoco es aceptado por ninguna máquina de Turing.

Problema Adicional [1 punto]

En este problema se pide al alumno demostrar que si junto con las reglas de resolución y factorización podemos usar tautologías en cualquier parte de una demostración, entonces el sistema resultante es completo, vale decir, si C es una cláusula, Σ es un conjunto de cláusulas y $\Sigma \models C$, entonces $\Sigma \vdash C$.

Formalmente, dada una cláusula C y un conjunto de cláusulas Σ , una demostración por resolución de C a partir de Σ es una secuencia de cláusulas $C_1, C_2, \dots, C_n$ tal que:

- Para cada $i \leq n$:
 - $C_i \in \Sigma$ o
 - C_i es una tautología o
 - existe $j < i$ tal que C_i es obtenido desde C_j usando la regla de factorización o
 - existen $j, k < i$ tales que C_i es obtenido desde C_j y C_k usando la regla de resolución.
- $C_n = C$.

Si C es demostrable desde Σ por resolución, entonces usamos la notación $\Sigma \vdash C$.

Nótese que si C es una tautología, entonces se deduce que $\Sigma \vdash C$ trivialmente. Así, para demostrar que el sistema de demostración es completo, sólo necesitamos considerar dos casos.

- (a) Demuestre que si Σ es inconsistente, entonces $\Sigma \vdash C$ para toda cláusula C .
- (b) Demuestre que si Σ es consistente, C no es una tautología y $\Sigma \models C$, entonces $\Sigma \vdash C$.

Nota: En esta pregunta usted obtiene 1 punto si su respuesta está absolutamente correcta. En caso contrario obtiene 0.