



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
 ESCUELA DE INGENIERIA
 DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2212
Interrogación 1

Problema 1 [1 punto]

Responda sí o no a cada una de las siguientes preguntas. Justifique su respuesta.

- (a) [0.3 puntos] Los conectivos unarios $\perp$ y $\top$ son definidos de la siguiente forma:

p	$\perp p$	p	$\top p$
0	0	0	1
1	0	1	1

¿Es $\{\wedge, \perp, \top\}$ funcionalmente completo?

- (b) [0.3 puntos] ¿Es $\{\rightarrow, \perp\}$ funcionalmente completo?

- (c) [0.4 puntos] El conectivo ternario M es definido de la siguiente forma:

p	q	r	$M(p, q, r)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

¿Es M funcionalmente completo?

Problema 2 [1 punto]

Dado un conjunto de letras proposicionales P , $L_\infty(P)$ es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

- $\Sigma \subseteq L(P)$, entonces $(\bigwedge \Sigma) \in L_\infty(P)$.
- Si $\varphi \in L_\infty(P)$, entonces $(\neg \varphi) \in L_\infty(P)$.
- Si $\varphi, \psi \in L_\infty(P)$, entonces $(\varphi \vee \psi) \in L_\infty(P)$ y $(\varphi \wedge \psi) \in L_\infty(P)$.

Por ejemplo, si $P = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ y $\Sigma = \{(\neg p_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$, entonces $(\bigwedge \Sigma)$ y $(\neg(\bigwedge \Sigma))$ son fórmulas en $L_\infty(P)$. Note que la primera fórmula nos dice que todas las letras proposicionales son falsas, mientras que la segunda nos dice que al menos una es verdadera. También note que $((\bigwedge \Sigma) \vee (\neg(\bigwedge \Sigma)))$ es una fórmula en $L_\infty(P)$ que debería ser siempre verdadera (tautología).

Dada una valuación $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$ y una fórmula $\varphi \in L_\infty(P)$, definimos $\sigma(\varphi)$ de la siguiente manera:

- Si $\varphi = (\bigwedge \Sigma)$, donde $\Sigma \subseteq L(P)$, entonces

$$\sigma(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si para cada } \psi \in \Sigma \text{ se tiene que } \sigma(\psi) = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

- Si $\varphi = (\neg \alpha)$, entonces

$$\sigma(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\alpha) = 0 \\ 0 & \text{si } \sigma(\alpha) = 1 \end{cases}$$

- Si $\varphi = (\alpha \vee \beta)$, entonces

$$\sigma(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\alpha) = 1 \text{ o } \sigma(\beta) = 1 \\ 0 & \text{si } \sigma(\alpha) = 0 \text{ y } \sigma(\beta) = 0 \end{cases}$$

- Si $\varphi = (\alpha \wedge \beta)$, entonces

$$\sigma(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\alpha) = 1 \text{ y } \sigma(\beta) = 1 \\ 0 & \text{si } \sigma(\alpha) = 0 \text{ o } \sigma(\beta) = 0 \end{cases}$$

Conteste las siguientes preguntas.

- (a) [0.4 puntos] Dado $P = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, demuestre que existe una fórmula $\varphi \in L_\infty(P)$ tal que φ no es equivalente a ningún $\Sigma \subseteq L(P)$.
- (b) [0.6 puntos] ¿Es el teorema de compacidad válido para la lógica proposicional infinitaria? Vale decir, dado $\Gamma \subseteq L_\infty(P)$, ¿Es cierto que si todo subconjunto finito de Γ es satisfacible, entonces Γ es satisfacible?

Problema 3 [2 puntos]

Dada una matriz C de 3×3 que contiene números entre 0 y 3, decimos que C es *completable* si es que existe una manera de reemplazar los números 0 por números entre 1 y 3 de tal forma que la suma de cada fila y de cada columna es la misma. Por ejemplo, la siguiente matriz es completable:

2	0	0
0	2	0
0	0	3

puesto que podemos reemplazar los valores 0 por los siguientes valores:

2	2	1
2	2	1
1	1	3

de manera tal que la suma de cada fila y de cada columna es 5. En cambio, la siguiente matriz no es completable:

1	1	1
0	0	0
3	0	0

Dada una matriz C de 3×3 , construya una fórmula φ en lógica proposicional tal que C es completable si y sólo si φ es satisfacible. En particular, φ tiene que ser construida de tal forma que cada valuación σ que satisface a φ represente una forma de completar C .

Problema 4 [2 puntos]

En este problema se pide al alumno demostrar que si junto con las reglas de resolución y factorización podemos usar tautologías en cualquier parte de una demostración, entonces el sistema resultante es completo, vale decir, si C es una cláusula, Σ es un conjunto de cláusulas y $\Sigma \models C$, entonces $\Sigma \vdash C$.

Formalmente, dada una cláusula C y un conjunto de cláusulas Σ , una demostración por resolución de C a partir de Σ es una secuencia de cláusulas $C_1, C_2, \dots, C_n$ tal que:

- Para cada $i \leq n$:
 - $C_i \in \Sigma$ o
 - C_i es una tautología o
 - existe $j < i$ tal que C_i es obtenido desde C_j usando la regla de factorización o
 - existen $j, k < i$ tales que C_i es obtenido desde C_j y C_k usando la regla de resolución.

■ $C_n = C$.

Si C es demostrable desde Σ por resolución, entonces usamos la notación $\Sigma \vdash C$.

Nótese que si C es una tautología, entonces se deduce que $\Sigma \vdash C$ trivialmente. Así, para demostrar que el sistema de demostración es completo, sólo necesitamos considerar dos casos.

- (a) [0.5 puntos] Demuestre que si Σ es inconsistente, entonces $\Sigma \vdash C$ para toda cláusula C .
- (b) [1.5 puntos] Demuestre que si Σ es consistente, C no es una tautología y $\Sigma \models C$, entonces $\Sigma \vdash C$.