



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213
Guía 5 - Teorías

1. Demuestre que si una teoría tiene modelos finitos con dominios arbitrariamente grandes, entonces tiene un modelo con dominio infinito.
2. Sea Σ una teoría sobre un vocabulario $\mathcal{L}$. Demuestre que si Σ es una teoría completa, entonces existe una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\Sigma = \text{Th}(\mathfrak{A})$.
3. Sean $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ estructuras sobre un vocabulario $\mathcal{L}$. Demuestre que si $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes y $\mathfrak{A}$ tiene dominio finito, entonces $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.
4. Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario con un conjunto finito de símbolos y $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$ -estructura con dominio finito. Demuestre que $\text{Th}(\mathfrak{A})$ es una teoría decidable.
5. Sea $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_k$ una lista de estructuras sobre un vocabulario $\mathcal{L}$, y $\text{Th}(\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_k)$ el conjunto de todas las $\mathcal{L}$ -oraciones φ tal que $\mathfrak{A}_i \models \varphi$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Demuestre que $\text{Th}(\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_k)$ es una teoría.
6. Encuentre un vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ tal que $\text{Th}(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2)$ no es una teoría completa.
7. Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, s(\cdot)\}$, y $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$ -estructura con dominio $\mathbb{N}$ y que interpreta los símbolos de $\mathcal{L}$ como la estructura $\mathfrak{N}$. Demuestre que $\text{Th}(\mathfrak{A})$ admite eliminación de cuantificadores, y que existe un algoritmo que construye φ^{sc} a partir de φ .
8. Sea $\mathcal{L} = \{s(\cdot)\}$, y $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$ -estructura con dominio $\mathbb{N}$ y que interpreta el símbolo de función s como la estructura $\mathfrak{N}$. En esta pregunta usted debe demostrar que $\text{Th}(\mathfrak{A})$ no admite eliminación de cuantificadores. De manera precisa, sea

$$\varphi(x) = \exists y (x = s(y)).$$

En esta pregunta usted debe demostrar que no existe una $\mathcal{L}$ -fórmula $\psi(x)$ sin cuantificadores tal que $\text{Th}(\mathfrak{A}) \models \forall x (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))$.

9. Sea Σ un conjunto consistente de oraciones sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ (nótese que Σ puede ser un conjunto infinito). Demuestre que si $\text{Th}(\Sigma)$ es finitamente axiomatizable, entonces existe un conjunto finito Σ_0 tal que $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ y $\text{Th}(\Sigma) = \text{Th}(\Sigma_0)$.

10. Sea $\mathcal{L} = \{<\}$, y $\mathfrak{R}_<$ una $\mathcal{L}$ -estructura con dominio $\mathbb{R}$ y que interpreta el símbolo $<$ como la estructura $\mathfrak{R}$. Demuestre que $\text{Th}(\mathfrak{R}_<)$ admite eliminación de cuantificadores. En particular, de un algoritmo que, dada una $\mathcal{L}$ -oración φ , construye φ^{sc} .
11. Sea $\mathcal{L} = \{0, s(\cdot)\}$, y $\mathfrak{N}_s$ la estructura con dominio $\mathbb{N}$ y que interpreta los símbolos de $\mathcal{L}$ como la estructura $\mathfrak{N}$. Además, sea PAR el conjunto de todos los números pares. En esta pregunta usted debe demostrar que PAR no es definible en $\mathfrak{N}_s$, vale decir, debe demostrar que no existe una $\mathcal{L}$ -fórmula $\varphi(x)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$: $n \in \text{PAR}$ si y sólo si $\mathfrak{N}_s \models \varphi(n)$.

Primero es importante notar que el teorema de isomorfismo no puede ser utilizado directamente para demostrar que PAR no es definible en $\mathfrak{N}_s$, puesto que el único isomorfismo de $\mathfrak{N}_s$ en $\mathfrak{N}_s$ es la identidad. Sin embargo, en clases demostramos que $\text{Th}(\mathfrak{N}_s)$ admite eliminación de cuantificadores, lo cual puede ser utilizado para demostrar que PAR no es definible en $\mathfrak{N}_s$. De manera precisa, resuelva los siguientes problemas.

- (a) Un subconjunto B de $\mathbb{N}$ se dice co-finito si $B = (\mathbb{N} \setminus C)$, donde C es un conjunto finito. Demuestre que para toda $\mathcal{L}$ -fórmula $\psi(x)$ sin cuantificadores, el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{N}_s \models \psi(n)\}$ es finito o co-finito.
 - (b) Utilizando (a) y el hecho de que $\text{Th}(\mathfrak{N}_s)$ admite eliminación de cuantificadores, demuestre que PAR no es definible en $\mathfrak{N}_s$ en lógica de primer orden.
12. Sea $\mathcal{L} = \emptyset$. Además, para cada $n \geq 2$, sea λ_n la siguiente $\mathcal{L}$ -oración:

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{(i,j): 1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right),$$

y sea $\text{Ax} = \{\lambda_n \mid n \geq 2\}$. Demuestre que $\text{Th}(\text{Ax})$ es una teoría decidible.

13. Sea $\mathcal{L} = \{E\}$, donde E es un símbolo de predicado binario, y sea $\mathfrak{A}$ una $\mathcal{L}$ -estructura con dominio infinito y tal que $E^{\mathfrak{A}} = \emptyset$. Demuestre que $\text{Th}(\mathfrak{A})$ es una teoría decidible.