



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213
Guía 4 - Lógica de primer orden

1. Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$ un lenguaje utilizado para representar grafos. En cada una de las siguientes preguntas escriba una $\mathcal{L}$ -oración que represente la propiedad mencionada.

- (a) El grafo es un clique.
- (b) El grafo contiene un clique con 4 nodos.
- (c) El grafo tiene un ciclo con 4 nodos.
- (d) El grafo contiene una 3-rueda.
- (e) Existen elementos en el grafo cuya distancia es 4.
- (f) La distancia máxima entre dos nodos del grafo es 3.

2. Sea $\mathcal{L} = \{f(\cdot), c\}$, donde f es una función unaria, y sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ las siguientes $\mathcal{L}$ -oraciones:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y), \\ \varphi_2 &= \forall x (f(x) \neq c), \\ \varphi_3 &= \forall x (x \neq c \rightarrow \exists y f(y) = x).\end{aligned}$$

- (a) Dé una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}_1$ tal que $\mathfrak{A}_1 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$.
- (b) Dé una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}_2$ tal que $\mathfrak{A}_2 \models \neg \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$.
- (c) Dé una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}_3$ tal que $\mathfrak{A}_3 \models \varphi_1 \wedge \neg \varphi_2 \wedge \varphi_3$.
- (d) Dé una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}_4$ tal que $\mathfrak{A}_4 \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \neg \varphi_3$.

3. Al igual que en la lógica proposicional, decimos que dos oraciones φ y ψ son *equivalentes*, denotado como $\varphi \equiv \psi$, si para toda estructura $\mathfrak{A}$ se tiene que: $\mathfrak{A} \models \varphi$ si y sólo si $\mathfrak{A} \models \psi$.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas? Justifique su respuesta.

- (a) $\forall x \varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi$.
- (b) $\exists x \varphi \equiv \neg \forall x \neg \varphi$.
- (c) $\exists x (\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x \varphi) \vee (\exists x \psi)$.
- (d) $\forall x (\varphi \vee \psi) \equiv (\forall x \varphi) \vee (\forall x \psi)$.
- (e) $\exists x (\varphi \wedge \psi) \equiv (\exists x \varphi) \wedge (\exists x \psi)$.

$$(f) \quad \forall x (\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi).$$

4. Al igual que en la lógica proposicional, decimos que una oración φ es *consecuencia lógica* de un conjunto de oraciones Σ , denotado como $\Sigma \models \varphi$, si para cada estructura $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \Sigma$, se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas? Justifique su respuesta.

- (a) $\{\forall x \exists y R(x, y)\} \models \exists x \forall y R(x, y)$.
- (b) $\{\exists x \forall y R(x, y)\} \models \forall x \exists y R(x, y)$.
- (c) $\{\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)), \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))\} \models \forall x R(x, x)$.
- (d) $\{\exists x (P(x) \wedge Q(x))\} \models (\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))$.
- (e) $\{\exists x P(x), \exists y Q(y)\} \models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$.
- (f) $\{\forall x \exists y S(x, y)\} \models \exists y S(y, y)$.

5. Demuestre que al igual que en el caso de la lógica proposicional, si Σ es un conjunto de oraciones y φ es una oración, entonces $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg \varphi\}$ no es satisfacible.

6. Sea EQUIV el siguientes lenguaje:

$$\text{EQUIV} = \{(\varphi, \psi) \mid \varphi \text{ y } \psi \text{ son oraciones equivalentes}\}.$$

Demuestre que EQUIV es indecidible.

7. Sea CONS el siguientes lenguaje:

$$\text{CONS} = \{(\Sigma, \varphi) \mid \Sigma \text{ es un conjunto finito de oraciones, } \varphi \text{ es una oración y } \Sigma \models \varphi\}.$$

Demuestre que CONS es indecidible.

8. Decimos que una oración φ es *finitamente satisfacible* si es que existe una estructura finita $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$, y definimos el lenguaje FIN-SAT como

$$\text{FIN-SAT} = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una oración finitamente satisfacible}\}.$$

Demuestre que FIN-SAT es indecidible.

- 9. ¿Son las estructuras $\langle \mathbb{N}, 0 \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, 0 \rangle$ isomorfas?
- 10. Demuestre que las estructuras $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ no son isomorfas.
- 11. ¿Son las estructuras $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ y $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ isomorfas? ¿Y qué sucede en el caso de $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$ y $\langle \mathbb{Z}, \cdot \rangle$?
- 12. ¿Son las estructuras $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ isomorfas? ¿Y qué sucede en el caso de $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$?
- 13. Sea $\mathcal{L} = \{L(\cdot, \cdot)\}$ y $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ las siguientes $\mathcal{L}$ -oraciones:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \forall x \neg L(x, x), \\ \varphi_2 &= \forall x \forall y \forall z ((L(x, y) \wedge L(y, z)) \rightarrow L(x, z)), \\ \varphi_3 &= \forall x \forall y (x = y \vee L(x, y) \vee L(y, x)), \\ \varphi_4 &= \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 (x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3 \wedge \forall y (y = x_1 \vee y = x_2 \vee y = x_3)). \end{aligned}$$

- (a) ¿Es cierto que todas las $\mathcal{L}$ -estructuras que satisfacen $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ son isomorfas?
- (b) ¿Es cierto que todas las $\mathcal{L}$ -estructuras que satisfacen $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$ son isomorfas?
14. Demuestre que $S = \{0\}$ no es definible en $\langle \mathbb{N} \rangle$.
 15. Demuestre que el conjunto $S = \mathbb{N}$ no es definible en $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.
 16. Demuestre que la función sucesor no es definible en $\langle \mathbb{N}, 0 \rangle$.
 17. Demuestre que la función sucesor es definible en $\langle \mathbb{N}, + \rangle$.
 18. Demuestre que la función $+$ no es definible en $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$.
 19. Demuestre que la función 2^n no es definible en $\langle \mathbb{N}, \cdot \rangle$.
 20. Demuestre que la relación de orden $<$ es definible en $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$, pero que no es definible en $\langle \mathbb{R}, + \rangle$.
 21. Demuestre que la relación de orden $<$ no es definible en $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$.
 22. Demuestre que la función exponencial e^x no es definible en $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$.
 23. ¿Es la función $+$ definible en $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$? Recuerde que cada número en $\mathbb{Q}$ puede representarse como $\frac{m}{n}$, donde $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$.
 24. Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario cualquiera. Demuestre usando el teorema de compacidad que no existe una $\mathcal{L}$ -oración φ tal que para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ se tiene que: $\mathfrak{A}$ es finita si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.
 25. Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot), a, b\}$, donde a y b son constantes. Demuestre usando el teorema de compacidad que no existe una $\mathcal{L}$ -oración φ tal que para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ se tiene que: Existe un camino de largo finito en $\mathfrak{A}$ desde a a b si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.
 26. Decimos que un grafo $G = (N, A)$ contiene un ciclo finito si existen nodos $a_1, \dots, a_n \in N$ ($n \geq 2$) tal que para todo $i \in [1, n-1]$ se tiene que $(a_i, a_{i+1}) \in A$ y además $(a_n, a_1) \in A$.
Sea $\mathcal{L} = \{E(\cdot, \cdot)\}$. Demuestre que no existe una $\mathcal{L}$ -oración φ tal que para toda $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ se tiene que: $\mathfrak{A}$ contiene un ciclo finito si y sólo si $\mathfrak{A} \models \varphi$.