



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213
Guía 3 - NP-completitud

1. Demuestre que $\text{PTIME} = \text{NP}$ si y sólo si existe un lenguaje finito que es NP-completo.
2. Sean $L_1 \subseteq \{0, 1\}^*$ y $L_2 \subseteq \{0, 1\}^*$ dos lenguajes tales que L_1 es NP-completo y $L_2 \in \text{PTIME}$.
 - (a) ¿Es $L_1 \cup L_2$ NP-completo?
 - (b) Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, ¿Es $L_1 \cup L_2$ NP-completo?
 - (c) Si $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ y $\text{NP} \neq \text{PTIME}$, ¿Es $L_1 \cup L_2$ NP-completo?
3. Sea $\text{NEG-EL} = \{(\varphi_1, \varphi_2) \mid \varphi_1 \text{ y } \varphi_2 \text{ son dos fórmulas proposicionales que no son equivalentes}\}$. ¿Es NEG-EL NP-completo?
4. Decimos que una cláusula C es de Horn si C contiene a lo más un literal positivo. Dada esta notación, demuestre que el siguiente lenguaje es NP-completo:
$$\{\varphi \mid \varphi \text{ es una fórmula satisfacible de la forma } C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_k, \\ \text{y cada fórmula } C_i \text{ es una cláusula de Horn o es una cláusula con dos literales}\}$$
5. Demuestre que el problema de 3-coloración de grafos es NP-completo.
6. Demuestre que el problema de k -coloración de grafos es NP-completo, para $k \geq 4$.
7. El número cromático $\chi(G)$ de un grafo G se define como el menor número de colores necesarios para colorear G . Defina el lenguaje CROM como: $\text{CROM} = \{(G, k) \mid \chi(G) = k\}$.
 - (a) Demuestre que CROM es NP-hard.
 - (b) ¿Está CROM en la clase NP?
8. Dada una matriz A de $n \times m$ números enteros y un vector $\vec{b}$ de $n \times 1$ número enteros, el problema de *programación entera* consiste en verificar si existe un vector $\vec{x}$ de $m \times 1$ números enteros tal que $A\vec{x} \leq \vec{b}$.
Demuestre que el problema de programación entera es NP-hard.
9. Dados grafos $G_1 = (N_1, A_1)$ y $G_2 = (N_2, A_2)$, decimos que G_1 es un subgrafo de G_2 si $N_1 \subseteq N_2$ y $A_1 \subseteq A_2$. Un grafo $G = (N, A)$ es un *clique* si para cada par de nodos distintos $a, b \in N$ se tiene que tanto (a, b) como (b, a) están en A . Un grafo G contiene un clique de tamaño k si existe un subgrafo G' de G tal que G' es un clique y G' tiene k nodos.
 - (a) Demuestre que el lenguaje $\text{CLIQUE} = \{(G, k) \mid G \text{ contiene un clique de tamaño } k\}$ es NP-completo.

- (b) Demuestre que el lenguaje $\text{CLIQUE}^{\geq} = \{(G, k) \mid G \text{ contiene un clique de tamaño } k' \geq k\}$ también es NP-completo.
- (c) ¿Es el lenguaje $\text{CLIQUE}^{\leq} = \{(G, k) \mid G \text{ contiene un clique de tamaño } k' \leq k\}$ NP-completo?
10. Sea HALF-CLIQUE el siguiente lenguaje:

$\{G \mid G = (N, A) \text{ es un grafo con un número par de nodos y que contiene un clique con } \frac{|N|}{2} \text{ nodos}\}.$

Demuestre que HALF-CLIQUE es NP-completo.

11. Dada una colección de conjuntos $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ y un número natural k , decimos que $\mathcal{C}$ tiene un *hitting set* de tamaño k si existe $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n C_i$ tal que S contiene a lo más k elementos y $S \cap C_i \neq \emptyset$, para cada $i \in [1, n]$. Sea HITTING el siguiente lenguaje:

$$\text{HITTING} = \{(\mathcal{C}, k) \mid \mathcal{C} \text{ tiene un hitting set de tamaño } k\}.$$

Demuestre que HITTING es NP-completo.

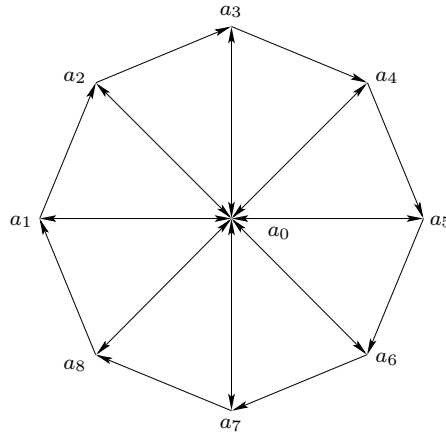
12. Decimos que un grafo $G = (N, A)$ tiene un *cubrimiento de vértices* de tamaño k si es que existe $N' \subseteq N$ tal que N' contiene k nodos y para cada arco $(a, b) \in A$ se tiene que $a \in N'$ o $b \in N'$. Demuestre que el siguiente lenguaje es NP-completo:

$$\text{CV} = \{(G, k) \mid G \text{ tiene un cubrimiento de vértices de tamaño } k\}.$$

13. ¿Es el lenguaje $\text{CV}^{\leq} = \{(G, k) \mid G \text{ tiene un cubrimiento de vértices de tamaño } k' \leq k\}$ NP-completo?
14. Un grafo no dirigido $G = (A, N)$ es una *n-rueda* si se cumple que:

$$\begin{aligned} A &= \{a_0, a_1, \dots, a_n\}, \\ N &= \{(a_i, a_{i+1}) \mid i \in [1, n-1]\} \cup \{(a_n, a_1)\} \cup \{(a_0, a_i), (a_i, a_0) \mid i \in [1, n]\}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, el siguiente grafo es una 8-rueda:



Defina el lenguaje SUB-RUEDA como

$$\text{SUB-RUEDA} = \{(G, n) \mid \text{existe un subgrafo } G' \text{ de } G \text{ tal que } G' \text{ es una } n\text{-rueda}\}.$$

Demuestre que SUB-RUEDA es NP-completo.

15. Un grafo $G_1 = (N_1, A_1)$ es isomorfo a un grafo $G_2 = (N_2, A_2)$ si existe una biyección $f : N_1 \rightarrow N_2$ tal que $(a, b) \in A_1$ si y sólo si $(f(a), f(b)) \in A_2$. Defina el lenguaje SUB-ISO de la siguiente forma:

$$\text{SUB-ISO} = \{(G_1, G_2) \mid \text{existe un subgrafo } G'_1 \text{ de } G_1 \text{ tal que } G'_1 \text{ y } G_2 \text{ son isomorfos}\}.$$

¿Es SUB-ISO NP-completo?

16. Dados grafos $G_1 = (N_1, A_1)$ y $G_2 = (N_2, A_2)$, decimos que una función $h : N_1 \rightarrow N_2$ es un homomorfismo de G_1 en G_2 si para cada arco $(a, b) \in A_1$, se tiene que $(h(a), h(b)) \in A_2$. Defina el lenguaje HOM de la siguiente forma:

$$\text{HOM} = \{(G_1, G_2) \mid \text{existe un homomorfismo de } G_1 \text{ en } G_2\}.$$

¿Es HOM NP-completo?

17. Decimos que dos grafos G_1 y G_2 son homomorficamente equivalentes si existe un homomorfismo h_1 de G_1 en G_2 , y existe un homomorfismo h_2 de G_2 en G_1 . Defina el lenguaje EQUIV-HOM de la siguiente forma:

$$\text{EQUIV-HOM} = \{(G_1, G_2) \mid G_1 \text{ y } G_2 \text{ son homomorficamente equivalentes}\}.$$

Demuestre que EQUIV-HOM es NP-completo.

18. Dado un conjunto de números naturales $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ y un número natural b , decimos que S *representa* b si existe $I \subseteq [1, n]$ tal que

$$\sum_{i \in I} a_i = b.$$

- (a) Dado $b \geq 0$, defina el lenguaje b -SUM como:

$$b\text{-SUM} = \{S \mid S \text{ representa } b\}.$$

¿Es b -SUM NP-completo?

- (b) Defina el lenguaje SUM como:

$$\text{SUM} = \{(S, b) \mid S \text{ representa } b\}.$$

Demuestre que SUM es NP-completo.

19. Sea #3-CNF-SAT el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \#3\text{-CNF-SAT} = \{(\varphi, n) \mid \varphi \text{ es una fórmula en CNF que contiene 3 literales} \\ \text{por cláusula, y existen exactamente } n \text{ valuaciones que satisfacen } \varphi\}. \end{aligned}$$

¿Es #3-CNF-SAT NP-completo?