



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACION

Lógica para Ciencia de la Computación - IIC2213
Guía 2 - Máquinas de Turing y problemas de decisión

1. Construya una máquina de Turing que acepte el lenguaje $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contiene al menos dos } 0\text{s}\}$.
2. Construya una máquina de Turing que acepte el lenguaje $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contiene exactamente dos } 0\text{s}\}$.
3. Construya una máquina de Turing que acepte el lenguaje $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ contiene el mismo número de } 0\text{s y } 1\text{s}\}$.
4. Sea $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{el largo de } w \text{ es divisible por } 2 \text{ ó } 3\}$. Construya una máquina de Turing que acepte L y que sólo mueva su cabeza a la derecha.
5. Construya una máquina de Turing que calcule la función $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ definida como $f(w) = w + 1$. Por ejemplo, $f(111) = 1000$ y $f(101) = 110$.
6. Construya una máquina de Turing que calcule la función $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ definida como $f(w) = |w|$, donde $|w|$ es el largo de w . Por ejemplo, $f(00110) = 101$, $f(001) = 11$ y $f(\varepsilon) = 0$.
7. Construya una máquina de Turing que acepte el lenguaje $L = \{w \in \{0,1,\#\}^* \mid w \in \{0,1\}^* \text{ y } w \text{ contiene el mismo número de } 0\text{s y } 1\text{s}\}$.
8. Construya una máquina de Turing que calcule la función $f : \{0,1\}^* \rightarrow \{0,1\}^*$ definida como $f(w) = w^r$, donde w^r es el inverso de w . Por ejemplo, $f(01101) = 10110$ y $f(111000) = 000111$.
9. Construya una máquina de Turing que acepte el lenguaje $L = \{w \in \{0,1,\#\}^* \mid \text{existe } w' \in \{0,1\}^* \text{ tal que } w = w'\#w'\}$.
10. Demuestre que el siguiente lenguaje es indecidible:
$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{existe una MT } M \text{ tal que } w = C(M) \text{ y } M \text{ acepta } \varepsilon\}.$$
11. Demuestre que el siguiente lenguaje es indecidible:
$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{existe una MT } M \text{ tal que } w = C(M) \text{ y } M \text{ acepta todas las palabras}\}.$$
12. Demuestre que el siguiente lenguaje es indecidible:
$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{existe una MT } M \text{ tal que } w = C(M) \text{ y } M \text{ acepta } 00 \text{ y no acepta } 11\}.$$

13. Demuestre que el siguiente lenguaje es indecidible:

$$E = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{existen máquinas de Turing } M_1 \text{ y } M_2 \text{ tales que} \\ w = C(M_1)0000C(M_2) \text{ y } L(M_1) = L(M_2)\}.$$

14. Demuestre que el siguiente lenguaje es indecidible:

$$S = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{existen máquinas de Turing } M_1 \text{ y } M_2 \text{ tales que} \\ w = C(M_1)0000C(M_2) \text{ y } L(M_1) \subseteq L(M_2)\}.$$

15. Sea M_1 una MT fija. Demuestre que el siguiente lenguaje es indecidible:

$$L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{existe MT } M \text{ tal que } w = C(M) \text{ y } L(M) = L(M_1)\}.$$

16. Demuestre que el siguiente lenguaje es indecidible:

$$I = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{existen máquinas de Turing } M_1 \text{ y } M_2 \text{ tales que} \\ w = C(M_1)0000C(M_2) \text{ y } L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset\}.$$

17. Demuestre que el siguiente lenguaje es indecidible:

$$O = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{existen máquinas de Turing } M_1 \text{ y } M_2 \text{ tal que} \\ w = C(M_1)0000C(M_2) \text{ y } (L(M_1) \subseteq L(M_2) \text{ o } L(M_2) \subseteq L(M_1))\}.$$

18. Indique si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

(a) Si L_1 y L_2 son dos lenguajes decidibles, entonces $L_1 \cup L_2$ es decidible.

(b) Si $L_1 \cup L_2$ es decidible, entonces L_1 y L_2 son decidibles.

(c) Si L_1 es un lenguaje decidible y $L_2 \subseteq L_1$, entonces L_2 es decidible.

19. En clases demostramos que no existe una MT M tal que M para en todas las entradas y $L(M) = U$. Demuestre que existe una MT M_U (que no para en todas las entradas) tal que $U = L(M_U)$.

20. Dado un lenguaje $L \subseteq \{0,1\}^*$, el complemento de L es definido como $\overline{L} = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \notin L\}$. ¿Existe una máquina de Turing M tal que $\overline{U} = L(M)$? Justifique su respuesta.

21. Demuestre que si existen máquinas de Turing M_1 y M_2 tales que $L = L(M_1)$ y $\overline{L} = L(M_2)$, entonces L es decidible.

22. Sean $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$, donde M_1 y M_2 son dos máquinas de Turing.

(a) ¿Existe una MT M tal que $L(M) = L_1 \cup L_2$?

(b) ¿Existe una MT M tal que $L(M) = L_1 \cap L_2$?

(c) ¿Existe una MT M tal que $L(M) = \overline{L_1}$?

23. Sea $\mathcal{X} = \{L \subseteq \{0, 1\}^* \mid \text{existe una MT } M \text{ tal que } L = L(M)\}$, vale decir, $\mathcal{X}$ es el conjunto de todos los lenguajes aceptados por máquinas de Turing. Decimos que $\mathcal{P}$ es una *propiedad* de los lenguajes aceptados por máquinas de Turing si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{X}$. Además, decimos que $\mathcal{P}$ es *trivial* si $\mathcal{P} = \emptyset$ o $\mathcal{P} = \mathcal{X}$.

Dada una propiedad $\mathcal{P}$, defina el lenguaje $L_{\mathcal{P}}$ como:

$$L_{\mathcal{P}} = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{existe una MT } M \text{ tal que } w = C(M) \text{ y } L(M) \in \mathcal{P}\}.$$

- (a) Si $\mathcal{P}$ es una propiedad trivial, ¿Es $L_{\mathcal{P}}$ decidible?
 - (b) Demuestre que si $\mathcal{P}$ no es trivial, entonces $L_{\mathcal{P}}$ es indecidible.
24. Usando el resultado anterior, obtenga como corolario que los problemas 10, 11, 12 y 15 son indecidibles.
25. Demuestre que existe un lenguaje $L \subseteq \{0, 1\}^*$ tal que L no es aceptado por ninguna máquina de Turing y $\overline{L}$ tampoco es aceptado por ninguna máquina de Turing.