

Teorías axiomatizables: Una definición más general

Recuerde que un conjunto de oraciones Γ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ es decidable si existe un algoritmo que, dada una $\mathcal{L}$ -oración φ , verifica si $\varphi \in \Gamma$

- Vale decir, si Γ es decidable cuando es considerado como un lenguaje

Sea Σ una teoría sobre $\mathcal{L}$.

Definición

Σ es recursivamente axiomatizable si existe un conjunto consistente y *decidable* Ax de $\mathcal{L}$ -oraciones tal que $\Sigma = Th(Ax)$

Teorías recursivamente axiomatizables: Una propiedad fundamental

Cada teoría finitamente axiomatizable es una teoría recursivamente axiomatizable.

- ¿Por qué son interesantes las teorías recursivamente axiomatizables?

Teorema

Si una teoría es recursivamente axiomatizable y completa (categórica), entonces es decidible

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorías axiomatizables: Una definición aun más general

Sea Σ una teoría sobre un vocabulario $\mathcal{L}$.

Definición

Σ es axiomatizable si existe un conjunto consistente y *recursivamente enumerable* Ax de $\mathcal{L}$ -oraciones tal que $\Sigma = Th(Ax)$

Teorías axiomatizables: Una propiedad fundamental

Teorema

Si una teoría es axiomatizable y completa (categórica), entonces es decidible

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Pregunta pendiente: ¿Es $\text{Th}(\mathfrak{N})$ decidable?

Hemos desarrollado algunas técnicas para demostrar que una teoría es decidable.

- ▶ Ya mencionamos que $\text{Th}(\mathfrak{N})$ no admite eliminación de cuantificadores

Un posible enfoque para demostrar que $\text{Th}(\mathfrak{N})$ es deducible:

Demostrar que $\text{Th}(\mathfrak{N})$ es axiomatizable

¿Funciona este enfoque?

Vamos a mostrar que no ...

Funciones recursivas en $\text{Th}(\mathfrak{N})$

Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$

Queremos mostrar que cualquier función recursiva $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ es definible en $\mathfrak{N}$.

- Vale decir, existe una $\mathcal{L}$ -fórmula $\varphi_f(x_1, \dots, x_k, y)$ tal que para todo $a_1, \dots, a_k, b \in \mathbb{N}$: $f(a_1, \dots, a_k) = b$ si y sólo si $\mathfrak{N} \models \varphi_f(a_1, \dots, a_k, b)$

Algunos ejemplos de funciones recursivas que sabemos como definir:

$$\begin{array}{lcl} \text{Suma} & : & \begin{array}{l} x + 0 = x \\ x + s(y) = s(x + y) \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Multiplicación} & : & \begin{array}{l} x \cdot 0 = 0 \\ x \cdot s(y) = (x \cdot y) + x \end{array} \end{array}$$

Una formalización de la noción de función recursiva

Podemos generalizar las definiciones de la suma y la multiplicación.

Suponga que $k \geq 0$, $g : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ y $h : \mathbb{N}^{k+2} \rightarrow \mathbb{N}$

- ▶ Además, suponga que g y h son funciones que ya han sido definidas

Definimos $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ recursivamente a partir de g y h :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_k, 0) &= g(x_1, \dots, x_k) \\ f(x_1, \dots, x_k, s(y)) &= h(x_1, \dots, x_k, y, f(x_1, \dots, x_k, y)) \end{aligned}$$

La función exponencial

Utilizamos la idea anterior para definir la función exponencial:

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1 \\ 2^{s(y)} &= 2 \cdot 2^y \end{aligned}$$

¿Cómo podemos definir la función exponencial en $\mathfrak{N}$?

- ▶ Vamos a utilizar la función β de Gödel para definir la función exponencial
- ▶ La función beta de Gödel nos va a permitir codificar cualquier función recursiva en $\mathfrak{N}$

La función β de Gödel

Definición (Función β de Gödel)

Dados $a, b, i \in \mathbb{N}$:

$$\beta(a, b, i) = a \bmod [b(i + 1) + 1]$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\beta(32, 7, 2) &= 32 \bmod [7(2 + 1) + 1] \\ &= 32 \bmod 22 \\ &= 10\end{aligned}$$

Una propiedad fundamental de la función β de Gödel

Lema

Para cada secuencia $r_0, r_1, \dots, r_n$ de números naturales, existen números naturales a, b tales que:

$$\text{para cada } i \in \{0, \dots, n\}: \beta(a, b, i) = r_i$$

Ejemplo

Para la secuencia $r_0 = 2, r_1 = 6, r_2 = 3$ tenemos que:

$$\beta(1.651.320.463.326, 720, 0) = 2$$

$$\beta(1.651.320.463.326, 720, 1) = 6$$

$$\beta(1.651.320.463.326, 720, 2) = 3$$

Vale decir, $a = 1.651.320.463.326$ y $b = 720$ en este caso.

La demostración del lemma

Considere una secuencia $r_0, r_1, \dots, r_n$ de números naturales.

Defina $b = \text{máx}\{n, r_0, r_1, \dots, r_n\}!$

- ▶ Tenemos que $n \leq b$ y $r_i \leq b$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$
- ▶ Además, para cada $0 < k \leq n$ tenemos que $k|b$

Defina $m_i = b(i + 1) + 1$

Vamos a demostrar que para cada $0 \leq i < j \leq n$, se tiene que m_i y m_j son primos relativos.

- ▶ Vale decir, $\text{MCD}(m_i, m_j) = 1$

Por contradicción, suponga que p es un primo tal que $p|m_i$ y $p|m_j$

La demostración del lemma

Tenemos entonces que $p|(m_j - m_i)$, vale decir, $p|b(j - i)$

- ▶ Por lo tanto $p|b$ o $p|(j - i)$

Si p divide a b , entonces se tiene que $p|(m_i - b(i + 1))$ dado que $p|m_i$

- ▶ Concluimos que $p|1$, lo cual es una contradicción

Tenemos entonces que $p|(j - i)$

Dado que $0 < j - i \leq n$, tenemos que $(j - i)|b$

- ▶ Concluimos entonces que $p|b$ ya que $p|(j - i)$, lo cual nuevamente nos lleva a una contradicción

La demostración del lemma

Para terminar con la demostración usamos el teorema chino del resto.

Dado que $\text{MCD}(m_i, m_j) = 1$ para cada $0 \leq i < j \leq n$, existe un número a tal que:

$$\text{para cada } i \in \{0, \dots, n\}: a \equiv r_i \pmod{m_i}$$

Puesto que para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ se tiene que $r_i \leq b < m_i$, concluimos que $a \pmod{m_i} = r_i$

Por lo tanto, tenemos que $\beta(a, b, i) = r_i$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ □

La función β de Gödel en lógica de primer orden

Sea $\varphi_{\text{mod}}(x, y, z)$ una fórmula definida de la siguiente forma:

$$\varphi_{\text{mod}}(x, y, z) = \exists u (x = u \cdot y + z \wedge 0 \leq z \wedge z < y),$$

donde $0 \leq z$ es una abreviación de $(0 = z \vee 0 < z)$

¿Qué representa z en $\varphi_{\text{mod}}(x, y, z)$?

La función β de Gödel entonces es definida en lógica de primer orden de la siguiente forma:

$$\varphi_{\beta}(x, y, z, w) = \varphi_{\text{mod}}(x, y \cdot (z + 1) + 1, w)$$

Definiendo la función exponencial

Queremos definir una fórmula $\varphi_{\text{exp}}(y, z)$ tal que:

$$\mathfrak{N} \models \varphi_{\text{exp}}(a, b) \quad \text{si y sólo si} \quad b = 2^a$$

Dada la definición recursiva de la función exponencial, nos gustaría definir $\varphi_{\text{exp}}(y, z)$ como la siguiente expresión:

$$\exists u_0 \exists u_1 \cdots \exists u_y \left[u_0 = 1 \wedge \forall v \left((0 \leq v \wedge v < y) \rightarrow u_{v+1} = 2 \cdot u_v \right) \wedge z = u_y \right]$$

Pero ésta no es una fórmula en lógica de primer orden

- Dado que el número de variables en ella depende del valor de y

Definiendo la función exponencial

La función β de Gödel puede ser usada para solucionar el problema mencionado en la transparencia anterior.

La función $\varphi_{\text{exp}}(y, z)$ se define de la siguiente forma:

$$\exists a \exists b \left[\varphi_{\beta}(a, b, 0, 1) \wedge \right. \\ \left. \forall v \forall w \left((0 \leq v \wedge v < y \wedge \varphi_{\beta}(a, b, v, w)) \rightarrow \varphi_{\beta}(a, b, s(v), 2 \cdot w) \right) \wedge \right. \\ \left. \varphi_{\beta}(a, b, y, z) \right],$$

donde 2 es una abreviación de $(1 + 1)$

Generalizando la construcción

Considere una función $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ definida recursivamente:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_k, 0) &= g(x_1, \dots, x_k) \\ f(x_1, \dots, x_k, s(y)) &= h(x_1, \dots, x_k, y, f(x_1, \dots, x_k, y)) \end{aligned}$$

Queremos utilizar la función β de Gödel para construir una fórmula φ_f que defina f

- Suponemos que las funciones g y h son definidas por las fórmulas φ_g y φ_h , respectivamente

Generalizando la construcción

La función $\varphi_f(x_1, \dots, x_k, y, z)$ se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \exists a \exists b \Big[& \forall u \left(\varphi_g(x_1, \dots, x_k, u) \rightarrow \varphi_\beta(a, b, 0, u) \right) \wedge \\ & \forall v \forall w_1 \forall w_2 \left((0 \leq v \wedge v < y \wedge \varphi_\beta(a, b, v, w_1) \wedge \right. \\ & \quad \left. \varphi_h(x_1, \dots, x_k, v, w_1, w_2)) \rightarrow \varphi_\beta(a, b, s(v), w_2) \right) \wedge \\ & \left. \varphi_\beta(a, b, y, z) \right] \end{aligned}$$