

Teorías decidibles

Definición

Una teoría Σ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ es decidible si existe un algoritmo que, dada una $\mathcal{L}$ -oración φ , verifica si $\varphi \in \Sigma$.

Ejercicio

Sea $\text{Ord}_{\leq k}$ el siguiente conjunto de axiomas sobre el vocabulario $\mathcal{L} = \{<\}$, para una constante $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} & \forall x \neg(x < x) \\ & \forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z) \\ & \forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y) \\ & \forall x_1 \cdots \forall x_k \forall x_{k+1} \left(\bigvee_{(i,j) : 1 \leq i < j \leq k+1} x_i = x_j \right) \end{aligned}$$

Demuestre que $\text{Th}(\text{Ord}_{\leq k})$ es decidible.

Teorías decidibles

$\text{Th}(\text{Ord}_{\leq k})$ es una teoría decidible.

- ▶ Las estructuras que satisfacen $\text{Th}(\text{Ord}_{\leq k})$ tienen a lo más k elementos

¿Son $\text{Th}(\mathfrak{N})$ y $\text{Th}(\mathfrak{R})$ teorías decidibles?

- ▶ ¿Qué herramientas podemos usar para responder este tipo de preguntas?

Veamos primero una herramienta para demostrar decidibilidad:

Eliminación de cuantificadores

Eliminación de cuantificadores

Sea Σ una teoría sobre un vocabulario $\mathcal{L}$.

Definición

Σ admite eliminación de cuantificadores si para cada $\mathcal{L}$ -fórmula $\varphi(x_1, \dots, x_k)$, existe una $\mathcal{L}$ -fórmula φ^{sc} sin cuantificadores tal que:

$$\Sigma \models \forall x_1 \cdots \forall x_k (\varphi(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \varphi^{sc}(x_1, \dots, x_k))$$

Nota

Si φ es una oración, entonces φ^{sc} es $\top$ (una tautología) o $\perp$ (una contradicción).

Eliminación de cuantificadores

Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$ y φ la siguiente fórmula:

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \exists y (x_1 \cdot y \cdot y + x_2 \cdot y + x_3 = 0)$$

Sobre $\text{Th}(\mathfrak{R})$, los cuantificadores de φ pueden ser eliminados. Si:

$$\varphi^{\text{sc}}(x_1, x_2, x_3) = \left((x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3) < x_2 \cdot x_2 \right) \vee \left((x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3) = x_2 \cdot x_2 \right)$$

se tiene que:

$$\text{Th}(\mathfrak{R}) \models \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (\varphi(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow \varphi^{\text{sc}}(x_1, x_2, x_3))$$

Eliminación de cuantificadores

Teorema

Si una teoría admite eliminación de cuantificadores, y existe un algoritmo que construye φ^{sc} a partir de φ , entonces es decidible.

¿Cómo se demuestra este teorema?

- ▶ ¿A qué teorías puede aplicarse?

La teoría de los números naturales con sucesor es decidible

Sea $\mathcal{L} = \{0, s(\cdot)\}$ y $\mathfrak{N}_s$ la estructura de $\mathcal{L}$ con dominio $\mathbb{N}$ y que interpreta 0 y s como la estructura $\mathfrak{N}$.

Teorema

$Th(\mathfrak{N}_s)$ admite eliminación de cuantificadores. Además, existe un algoritmo que construye φ^{sc} a partir de φ .

Demostración: La demostración es por inducción en φ .

- ▶ Si φ es una fórmula atómica, entonces $\varphi^{sc} = \varphi$
- ▶ Para los conectivos lógicos la propiedad es simple de verificar

La teoría de los números naturales con sucesor es decidable

- Suponga que $\varphi(x_1, \dots, x_k) = \exists y \psi(x_1, \dots, x_k, y)$ y que existe fórmula $\psi^{\text{sc}}(x_1, \dots, x_k, y)$ sin cuantificadores tal que:

$$\text{Th}(\mathfrak{N}_s) \models \forall x_1 \cdots \forall x_k \forall y (\psi(x_1, \dots, x_k, y) \leftrightarrow \psi^{\text{sc}}(x_1, \dots, x_k, y))$$

Entonces tenemos que:

$$\text{Th}(\mathfrak{N}_s) \models \forall x_1 \cdots \forall x_k (\varphi(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \exists y \psi^{\text{sc}}(x_1, \dots, x_k, y))$$

y podemos construir $\varphi^{\text{sc}}(x_1, \dots, x_k)$ desde $\psi^{\text{sc}}(x_1, \dots, x_k, y)$

La teoría de los números naturales con sucesor es decidable

Dado que $\exists x (\alpha \vee \beta)$ es equivalente a $(\exists x \alpha) \vee (\exists x \beta)$, nos concentramos en el caso:

$$\psi^{\text{sc}}(x_1, \dots, x_k, y) = \left(\bigwedge_{i=1}^m t_i = t'_i \right) \wedge \left(\bigwedge_{i=m+1}^n t_i \neq t'_i \right)$$

donde t_i y t'_i son $\mathcal{L}$ -términos.

Sea u una variable o la constante 0. Entonces para $j \geq 0$:

$$s^j(u) = \begin{cases} u & j = 0 \\ \underbrace{s(s(\cdots s(u) \cdots))}_{j \text{ símbolos } s} & j > 0 \end{cases}$$

La teoría de los números naturales con sucesor es decidable

Entonces de $\text{Th}(\mathfrak{N}_s)$ es consecuencia lógica:

$$\forall x_1 \cdots \forall x_k \left(\varphi(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \right. \\ \left. \exists y \left(\bigwedge_{i=1}^m s^{p_i}(u_i) = s^{q_i}(v_i) \wedge \bigwedge_{i=m+1}^n s^{p_i}(u_i) \neq s^{q_i}(v_i) \right) \right)$$

donde:

- ▶ Cada símbolo u_i (y cada símbolo v_i) es el símbolo 0 ó una de las variables $x_1, \dots, x_k, y$
- ▶ Si $v_i = y$, entonces $u_i = y$

La teoría de los números naturales con sucesor es decidable

Para construir φ^{sc} , primero generamos la fórmula α^{sc} desde ψ^{sc} considerando las fórmulas de la forma $s^{p_i}(u) = s^{q_i}(u)$ o $s^{p_i}(u) \neq s^{q_i}(u)$, donde $u = y$ o $u = 0$:

- ▶ Si $p_i = q_i$, entonces $s^{p_i}(u) = s^{q_i}(u)$ es reemplazado por $\top$ y $s^{p_i}(u) \neq s^{q_i}(u)$ es reemplazado por $\perp$
- ▶ Si $p_i \neq q_i$, entonces $s^{p_i}(u) = s^{q_i}(u)$ es reemplazado por $\perp$ y $s^{p_i}(u) \neq s^{q_i}(u)$ es reemplazado por $\top$

La teoría de los números naturales con sucesor es decidable

Si y es la única variable libre en ψ^{sc} , entonces φ^{sc} es generada desde α^{sc} de la siguiente forma:

1. Si al menos una fórmula en α^{sc} es $\perp$, entonces $\varphi^{\text{sc}} = \perp$
2. Si $\perp$ no es mencionado en α^{sc} , entonces:
 - 2.1 Si α^{sc} no menciona una fórmula de la forma $s^{p_i}(y) = s^{q_i}(0)$, entonces $\varphi^{\text{sc}} = \top$
 - 2.2 Si α^{sc} menciona una fórmula de la forma $s^{p_i}(y) = s^{q_i}(0)$ con $p_i > q_i$, entonces $\varphi^{\text{sc}} = \perp$
 - 2.3 Suponga que ninguno de los casos anteriores se cumple: α^{sc} menciona fórmula $s^{p_r}(y) = s^{q_r}(0)$ con $p_r \leq q_r$
 φ^{sc} es obtenida eliminando primero el cuantificador $\exists y$ y las fórmulas $\top$ desde α^{sc} , para luego reemplazar y por $s^{q_r - p_r}(0)$ en las fórmulas restantes

La teoría de los números naturales con sucesor es decidible

Suponga ahora que y no es la única variable libre en ψ^{sc} .

Si alguna de las fórmulas en α^{sc} es $\perp$, entonces

$$\varphi^{\text{sc}}(x_1, \dots, x_k) = \left(\bigwedge_{i=1}^k x_i \neq x_i \right)$$

En caso contrario, β^{sc} es generada eliminando $\top$ desde α^{sc} , y el proceso continua como es descrito a continuación.

La teoría de los números naturales con sucesor es decidible

Suponga ahora que β^{sc} no menciona a ninguna fórmula de la forma $s^{p_i}(y) = s^{q_i}(v_i)$.

- Pueden aparecer fórmulas de la forma $s^{p_i}(y) \neq s^{q_i}(v_i)$

En este caso φ^{sc} es generado eliminando desde β^{sc} todas las fórmulas atómicas que mencionan a la variable y .

- ¿Por qué funciona bien esto?

La teoría de los números naturales con sucesor es decidible

Antes de continuar, veamos un ejemplo del último paso. Sea $\beta^{\text{sc}}(x_1, x_2, y)$ la fórmula:

$$\begin{aligned} s(s(y)) \neq s(x_1) \wedge s(y) \neq s(s(s(x_2))) \wedge \\ s(x_1) = s(s(x_2)) \wedge s(x_2) \neq s(0) \end{aligned}$$

Para eliminar y desde $\beta^{\text{sc}}(x_1, x_2, y)$, son eliminadas las fórmulas $s(s(y)) \neq s(x_1)$ y $s(y) \neq s(s(s(x_2)))$:

$$\varphi^{\text{sc}}(x_1, x_2) = s(x_1) = s(s(x_2)) \wedge s(x_2) \neq s(0)$$

La teoría de los números naturales con sucesor es decidable

Dado que de $\text{Th}(\mathfrak{N}_s)$ es consecuencia lógica:

$$\forall x_1 \forall x_2 \left(\varphi(x_1, x_2) \leftrightarrow \exists y \left(s(s(y)) \neq s(x_1) \wedge \right. \right. \\ \left. \left. s(y) \neq s(s(s(x_2))) \wedge s(x_1) = s(s(x_2)) \wedge s(x_2) \neq s(0) \right) \right)$$

Se tiene que de $\text{Th}(\mathfrak{N}_s)$ es consecuencia lógica:

$$\forall x_1 \forall x_2 \left(\varphi(x_1, x_2) \leftrightarrow \left(s(x_1) = s(s(x_2)) \wedge s(x_2) \neq s(0) \right) \right)$$

La teoría de los números naturales con sucesor es decidable

Para terminar, suponga que β^{sc} menciona al menos una fórmula de la forma $s^{p_r}(y) = s^{q_r}(v_r)$.

Para eliminar y desde β^{sc} se utiliza la igualdad $s^{p_r}(y) = s^{q_r}(v_r)$.

- ▶ La fórmula $s^{p_i}(y) = s^{q_i}(v_i)$ es equivalente a:

$$s^{p_i+p_r}(y) = s^{q_i+p_r}(v_i)$$

por lo que usando $s^{p_r}(y) = s^{q_r}(v_r)$, obtenemos que:

$$s^{p_i+q_r}(v_r) = s^{q_i+p_r}(v_i)$$

La teoría de los números naturales con sucesor es decidable

De manera precisa, sea γ^{sc} la fórmula generada desde β^{sc} ejecutando los siguientes pasos:

- ▶ Se elimina $s^{p_r}(y) = s^{q_r}(v_r)$ desde β^{sc}
- ▶ Se reemplaza cada una de las restantes fórmulas $s^{p_i}(y) = s^{q_i}(v_i)$ por $s^{p_i+q_r}(v_r) = s^{q_i+p_r}(v_i)$
- ▶ Se reemplaza cada fórmula $s^{p_i}(y) \neq s^{q_i}(v_i)$ por $s^{p_i+q_r}(v_r) \neq s^{q_i+p_r}(v_i)$

Si $p_r = 0$, entonces $\varphi^{\text{sc}} = \gamma^{\text{sc}}$. Pero en caso contrario, hay que agregar algo a γ^{sc} .

- ▶ ¿Por qué no basta con γ^{sc} si $p_r > 0$?

La teoría de los números naturales con sucesor es decidable

Finalmente, si $p_r > 0$, se tiene que:

$$\varphi^{\text{sc}} = \gamma^{\text{sc}} \wedge \left(\bigwedge_{i=0}^{p_r-1} s^{q_r}(v_r) \neq s^i(0) \right)$$

En ambos casos, tenemos que:

$$\text{Th}(\mathfrak{N}_s) \models \forall x_1 \cdots \forall x_k (\varphi(x_1, \dots, x_k) \leftrightarrow \varphi^{\text{sc}}(x_1, \dots, x_k))$$

La teoría de los números naturales con sucesor es decidable

Para concluir, veamos un ejemplo del último paso.

Sea $\beta^{\text{sc}}(x_1, x_2, x_3, x_4, y)$ la fórmula:

$$s(s(y)) = s(x_1) \wedge s(s(y)) = x_2 \wedge s(x_2) = s(s(x_4)) \wedge \\ s(s(y)) \neq s(s(x_3)) \wedge s(x_3) \neq s(s(0))$$

Para eliminar y desde $\beta^{\text{sc}}(x_1, x_2, x_3, x_4, y)$, primero utilizamos la fórmula $s(s(y)) = s(x_1)$:

$$s(s(s(x_1))) = s(s(x_2)) \wedge s(x_2) = s(s(x_4)) \wedge \\ s(s(s(x_1))) \neq s(s(s(x_3))) \wedge s(x_3) \neq s(s(0))$$

y después agregamos la fórmula:

$$s(x_1) \neq 0 \wedge s(x_1) \neq s(0)$$

La teoría de los números naturales con sucesor es decidable

Dado que:

$$\begin{aligned} \text{Th}(\mathfrak{N}_s) \models \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \bigg(& \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) \leftrightarrow \\ & \exists y \left(s(s(y)) = s(x_1) \wedge s(s(y)) = x_2 \wedge \right. \\ & \quad s(x_2) = s(s(x_4)) \wedge s(s(y)) \neq s(s(x_3)) \wedge \\ & \quad \left. \left. s(x_3) \neq s(s(0)) \right) \right) \bigg) \end{aligned}$$

La teoría de los números naturales con sucesor es decidable

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{Th}(\mathfrak{N}_s) \models \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \bigg(& \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) \leftrightarrow \\ & \left(s(s(s(x_1))) = s(s(x_2)) \wedge s(x_2) = s(s(x_4)) \wedge \right. \\ & s(s(s(x_1))) \neq s(s(s(s(x_3)))) \wedge s(x_3) \neq s(s(0)) \wedge \\ & \left. s(x_1) \neq 0 \wedge s(x_1) \neq s(0) \right) \bigg) \end{aligned}$$

La teoría de los números naturales con sucesor es decidible

Corolario

$Th(\mathfrak{N}_s)$ es una teoría decidible.

¿Qué otras teorías admiten eliminación de cuantificadores?

- Vamos a ver que esta es una herramienta muy útil para decidir una teoría

La teoría de los números reales es decidible

Recuerde que $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, 0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}}, s^{\mathfrak{R}}, +^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}}, <^{\mathfrak{R}} \rangle$.

Teorema (Tarski)

$Th(\mathfrak{R})$ admite eliminación de cuantificadores. Además, existe un algoritmo que construye φ^{sc} a partir de φ .

Corolario

$Th(\mathfrak{R})$ es una teoría decidible.

La teoría de los números naturales con adición es decidable

Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, s(\cdot), +, <\}$ y $\mathfrak{N}_+$ la estructura con dominio $\mathbb{N}$ y que interpreta los símbolos de $\mathcal{L}$ como la estructura $\mathfrak{N}$.

Queremos demostrar que $\text{Th}(\mathfrak{N}_+)$ es decidable.

- ¿Es posible utilizar la técnica de eliminación de cuantificadores en este caso?

$\text{Th}(\mathfrak{N}_+)$ **no** admite eliminación de cuantificadores.

- Por ejemplo, no es posible eliminar los cuantificadores de fórmula $\varphi(x) = \exists y (x = y + y)$

La teoría de los números naturales con adición es decidible

Pero hay una posible solución al problema.

- ▶ Extender $\mathcal{L}$ con un conjunto de predicados que permita la eliminación de cuantificadores

Ejemplo

Sea $\equiv_2$ un predicado definido como: $n \equiv_2 m$ es cierto si $(n - m)$ es divisible por 2.

- ▶ n y m son congruentes en módulo 2

Si agregamos $\equiv_2$ a $\mathcal{L}$ entonces es posible eliminar el cuantificador desde $\varphi(x) = \exists y (x = y + y)$.

- ▶ $\varphi(x)$ es equivalente a $(x \equiv_2 0)$

La teoría de los números naturales con adición es decidable

Sea $\mathcal{L}_{\equiv}$ el vocabulario $\mathcal{L} \cup \{\equiv_k \mid k \geq 2\}$. Además, sea $\mathfrak{N}_{\equiv}$ una $\mathcal{L}_{\equiv}$ -estructura tal que:

- ▶ $\mathbb{N}$ es el dominio de $\mathfrak{N}_{\equiv}$
- ▶ los símbolos de $\mathcal{L}$ son interpretados en $\mathfrak{N}_{\equiv}$ como en la estructura $\mathfrak{N}_+$
- ▶ Para cada $k \geq 2$: (n, m) está en la interpretación de $\equiv_k$ en $\mathfrak{N}_{\equiv}$ si y sólo si $(n - m)$ es divisible por k

Teorema (Presburger)

$Th(\mathfrak{N}_{\equiv})$ admite eliminación de cuantificadores. Además, existe un algoritmo que construye φ^{sc} a partir de φ .

La teoría de los números naturales con adición es decidable

Corolario

$Th(\mathfrak{N}_{\equiv})$ es una teoría decidable.

Obtenemos el resultado que estábamos buscando:

Corolario

$Th(\mathfrak{N}_{+})$ es una teoría decidable.

¿Dónde estamos?

Utilizando la técnica de eliminación de cuantificadores mostramos que las siguientes teorías son decidibles:

- ▶ $\text{Th}(\mathfrak{N}_s)$, $\text{Th}(\mathfrak{N}_+)$, $\text{Th}(\mathfrak{N}_\equiv)$ y $\text{Th}(\mathfrak{N})$

Todavía nos queda responder si $\text{Th}(\mathfrak{N})$ es decidable.

- ▶ La técnica de eliminación de cuantificadores no funciona en este caso
- ▶ ¿Qué otras técnicas pueden ser usadas para demostrar que una teoría es decidable?

Teorías finitamente axiomatizables

Sea Σ una teoría sobre un vocabulario $\mathcal{L}$.

Definición

Σ es finitamente axiomatizable si existe un conjunto finito y consistente Ax de $\mathcal{L}$ -oraciones tal que $\Sigma = Th(Ax)$.

Ejemplo

$Th(Gr)$ es una teoría finitamente axiomatizable.

Teorías finitamente axiomatizables: Una propiedad fundamental

Demostramos que $\text{Th}(\text{Gr})$ no es una teoría completa.

- Existen entonces teorías finitamente axiomatizables que no son ni completas ni categóricas

Pero estos conceptos están relacionados:

Teorema

Si una teoría es finitamente axiomatizable y completa (categórica), entonces es decidible.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorías finitamente axiomatizables y completas: Ejemplo

Sea $\mathcal{L} = \{<\}$ y OrdDen el siguiente conjunto de axiomas:

$$\forall x \neg(x < x)$$

$$\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$$

$$\forall x \forall y (x < y \vee x = y \vee y < x)$$

$$\forall x \exists y (x < y)$$

$$\forall x \exists y (y < x)$$

$$\forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$$

$\text{Th}(\text{OrdDen})$ es la teoría de los ordenes lineales densos sin primer ni último elemento.

- $\langle \mathbb{R}, < \rangle$ y $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ son modelos de esta teoría

Teorías finitamente axiomatizables y completas: Ejemplo

Proposición

$Th(OrdDen)$ es una teoría completa y finitamente axiomatizable.

Corolario

$Th(OrdDen)$ es una teoría decidible.