

Teorías

IIC2213

¿Qué es una teoría?

Una teoría es un cúmulo de información.

- ▶ Debe estar libre de contradicciones
- ▶ Debe ser cerrada con respecto a lo que se puede deducir de ella

¿Qué es una teoría?

Una teoría es un cúmulo de información.

- ▶ Debe estar libre de contradicciones
- ▶ Debe ser cerrada con respecto a lo que se puede deducir de ella

Inicialmente vamos a modelar esta noción en lógica de primer orden.

- ▶ También vamos a considerar lógicas de mayor orden

La teoría de una estructura

Dada una estructura $\mathfrak{A}$ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$, la teoría de $\mathfrak{A}$ se define como:

$$\text{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

La teoría de una estructura

Dada una estructura $\mathfrak{A}$ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$, la teoría de $\mathfrak{A}$ se define como:

$$\text{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

$\text{Th}(\mathfrak{A})$ satisface los principios antes enunciados:

- ▶ $\text{Th}(\mathfrak{A})$ es consistente: $\mathfrak{A} \models \text{Th}(\mathfrak{A})$
- ▶ $\text{Th}(\mathfrak{A})$ es cerrada bajo deducción: Si $\text{Th}(\mathfrak{A}) \models \varphi$, entonces $\varphi \in \text{Th}(\mathfrak{A})$

La teoría de una estructura: Ejemplos

Recuerde que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} &= \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, 1^{\mathfrak{N}}, s^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}, <^{\mathfrak{N}} \rangle \\ \mathfrak{R} &= \langle \mathbb{R}, 0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}}, s^{\mathfrak{R}}, +^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}}, <^{\mathfrak{R}} \rangle\end{aligned}$$

Dos teorías fundamentales:

- ▶ Aritmética: $\text{Th}(\mathfrak{N})$
- ▶ Teoría de los números reales: $\text{Th}(\mathfrak{R})$

La teoría generada a partir de un conjunto de axiomas

Ax: Conjunto de oraciones consistente sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

El conjunto de lo que se puede deducir a partir de Ax es definido como:

$$\text{Th}(\text{Ax}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } \text{Ax} \models \varphi\}$$

La teoría generada a partir de un conjunto de axiomas

Ax: Conjunto de oraciones consistente sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

El conjunto de lo que se puede deducir a partir de Ax es definido como:

$$\text{Th}(\text{Ax}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } \text{Ax} \models \varphi\}$$

$\text{Th}(\text{Ax})$ satisface los principios antes enunciados:

- ▶ $\text{Th}(\text{Ax})$ es consistente: Si $\mathfrak{A} \models \text{Ax}$, entonces $\mathfrak{A} \models \text{Th}(\text{Ax})$
- ▶ $\text{Th}(\mathfrak{A})$ es cerrada bajo deducción: Si $\text{Th}(\text{Ax}) \models \varphi$, entonces $\varphi \in \text{Th}(\text{Ax})$

Teorías generadas a partir de axiomas: Ejemplos

Sea $\mathcal{L} = \{e, \circ\}$ y Gr el siguiente conjunto de axiomas:

$$\forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$$

$$\forall x ((x \circ e = x) \wedge (e \circ x = x))$$

$$\forall x \exists y ((x \circ y = e) \wedge (y \circ x = e))$$

Teoría de grupos: $\text{Th}(\text{Gr})$

Teoría: Definición formal

Dado: Conjunto Σ de oraciones sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

Teoría: Definición formal

Dado: Conjunto Σ de oraciones sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

Definición

Σ es una teoría si:

- (1) Σ es satisfacible
- (2) Σ es cerrado bajo consecuencia lógica: Si φ es una $\mathcal{L}$ -oración tal que $\Sigma \models \varphi$, entonces $\varphi \in \Sigma$

Teoría: Definición formal

Dado: Conjunto Σ de oraciones sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

Definición

Σ es una teoría si:

- (1) Σ es satisfacible
- (2) Σ es cerrado bajo consecuencia lógica: Si φ es una $\mathcal{L}$ -oración tal que $\Sigma \models \varphi$, entonces $\varphi \in \Sigma$

Ejemplo

$\text{Th}(\mathfrak{N})$, $\text{Th}(\mathfrak{R})$ y $\text{Th}(\text{Gr})$ son teorías.

Teorías completas

Definición

Una teoría Σ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ se dice completa si para cada $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\Sigma \models \varphi \quad \text{o} \quad \Sigma \models \neg\varphi$$

Teorías completas

Definición

Una teoría Σ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ se dice completa si para cada $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\Sigma \models \varphi \quad \text{o} \quad \Sigma \models \neg\varphi$$

Ejemplo

$\text{Th}(\mathfrak{N})$ y $\text{Th}(\mathfrak{R})$ son teorías completas.

► ¿Por qué?

La teoría de una estructura es siempre completa

Teorema

$Th(\mathfrak{A})$ es una teoría completa, para cualquier estructura $\mathfrak{A}$.

La teoría de una estructura es siempre completa

Teorema

$Th(\mathfrak{A})$ es una teoría completa, para cualquier estructura $\mathfrak{A}$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorías no completas

Una teoría generada a partir de un conjunto de axiomas no es necesariamente completa.

- ▶ ¿Por qué no funciona la demostración para $\text{Th}(\mathfrak{A})$ aquí?

Teorías no completas

Una teoría generada a partir de un conjunto de axiomas no es necesariamente completa.

- ▶ ¿Por qué no funciona la demostración para $\text{Th}(\mathfrak{A})$ aquí?

Proposición

$\text{Th}(Gr)$ no es una teoría completa.

Teorías no completas

Una teoría generada a partir de un conjunto de axiomas no es necesariamente completa.

- ¿Por qué no funciona la demostración para $\text{Th}(\mathfrak{A})$ aquí?

Proposición

$\text{Th}(\text{Gr})$ no es una teoría completa.

Demostración: Sea φ la oración $\forall x \forall y (x \circ y = y \circ x)$. Vamos a demostrar que:

$$\text{Th}(\text{Gr}) \not\models \varphi \text{ y } \text{Th}(\text{Gr}) \not\models \neg \varphi$$

¿Qué nos dice esto?

La teoría de grupos no es completa: Demostración

Primero vamos a demostrar que $\text{Th}(\text{Gr}) \not\models \neg\varphi$.

- ▶ Es decir, vamos a construir un grupo conmutativo

La teoría de grupos no es completa: Demostración

Primero vamos a demostrar que $\text{Th}(\text{Gr}) \not\models \neg\varphi$.

- ▶ Es decir, vamos a construir un grupo conmutativo

Sea $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, e^{\mathfrak{A}}, \circ^{\mathfrak{A}} \rangle$ definido como:

- ▶ $e^{\mathfrak{A}} = 0$
- ▶ Para cada $a, b \in \mathbb{Z}$: $a \circ^{\mathfrak{A}} b = a + b$

Se tiene que $\mathfrak{A} \models \text{Th}(\text{Gr})$ y $\mathfrak{A} \models \varphi$.

- ▶ Concluimos que $\text{Th}(\text{Gr}) \not\models \neg\varphi$

La teoría de grupos no es completa: Demostración

Ahora vamos a demostrar que $\text{Th}(\text{Gr}) \not\models \varphi$.

- Es decir, vamos a construir un grupo **no** conmutativo

La teoría de grupos no es completa: Demostración

Ahora vamos a demostrar que $\text{Th}(\text{Gr}) \not\models \varphi$.

- ▶ Es decir, vamos a construir un grupo **no** conmutativo

Sea $\mathfrak{B} = \langle B, e^{\mathfrak{B}}, \circ^{\mathfrak{B}} \rangle$ definido como:

- ▶ B es el conjunto de las funciones $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ que son 1-1
- ▶ $e^{\mathfrak{B}}$ es la función identidad
- ▶ $\circ^{\mathfrak{B}}$ es interpretada como la composición de funciones.
 - ▶ $(f_1 \circ^{\mathfrak{B}} f_2)(x) = f_1(f_2(x))$

La teoría de grupos no es completa: Demostración

Ahora vamos a demostrar que $\text{Th}(\text{Gr}) \not\models \varphi$.

- ▶ Es decir, vamos a construir un grupo **no** conmutativo

Sea $\mathfrak{B} = \langle B, e^{\mathfrak{B}}, \circ^{\mathfrak{B}} \rangle$ definido como:

- ▶ B es el conjunto de las funciones $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ que son 1-1
- ▶ $e^{\mathfrak{B}}$ es la función identidad
- ▶ $\circ^{\mathfrak{B}}$ es interpretada como la composición de funciones.
 - ▶ $(f_1 \circ^{\mathfrak{B}} f_2)(x) = f_1(f_2(x))$

¿Cuántos elementos tiene B ? ¿Por qué está bien definido $\circ^{\mathfrak{B}}$?

La teoría de grupos no es completa: Demostración

Tenemos que $\mathfrak{B} \models \text{Th}(\text{Gr})$

- Para cada $f \in B$: $f^{-1} \in B$ y $(f \circ^{\mathfrak{B}} f^{-1}) = (f^{-1} \circ^{\mathfrak{B}} f) = e^{\mathfrak{B}}$

La teoría de grupos no es completa: Demostración

Tenemos que $\mathfrak{B} \models \text{Th}(\text{Gr})$

► Para cada $f \in B$: $f^{-1} \in B$ y $(f \circ^{\mathfrak{B}} f^{-1}) = (f^{-1} \circ^{\mathfrak{B}} f) = e^{\mathfrak{B}}$

Pero $\mathfrak{B} \not\models \varphi$. Considere los siguientes elementos de B :

$$\begin{array}{lll} f_1(1) & = & 2 \\ f_1(2) & = & 3 \\ f_1(3) & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{lll} f_2(1) & = & 1 \\ f_2(2) & = & 3 \\ f_2(3) & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} g(1) & = & 2 \\ g(2) & = & 1 \\ g(3) & = & 3 \end{array} \quad \begin{array}{lll} h(1) & = & 3 \\ h(2) & = & 2 \\ h(3) & = & 1 \end{array}$$

La teoría de grupos no es completa: Demostración

Tenemos que $\mathfrak{B} \models \text{Th}(\text{Gr})$

► Para cada $f \in B$: $f^{-1} \in B$ y $(f \circ^{\mathfrak{B}} f^{-1}) = (f^{-1} \circ^{\mathfrak{B}} f) = e^{\mathfrak{B}}$

Pero $\mathfrak{B} \not\models \varphi$. Considere los siguientes elementos de B :

$f_1(1)$	$=$	2	$f_2(1)$	$=$	1
$f_1(2)$	$=$	3	$f_2(2)$	$=$	3
$f_1(3)$	$=$	1	$f_2(3)$	$=$	2
$g(1)$	$=$	2	$h(1)$	$=$	3
$g(2)$	$=$	1	$h(2)$	$=$	2
$g(3)$	$=$	3	$h(3)$	$=$	1

Se tiene que $(f_1 \circ^{\mathfrak{B}} f_2) = g$ y $(f_2 \circ^{\mathfrak{B}} f_1) = h$

► Concluimos que $\text{Th}(\text{Gr}) \not\models \varphi$

Teorías completas generadas a partir de axiomas

Ejercicio

- (1) Construya un conjunto infinito Ax de axiomas tal que $Th(Ax)$ sea una teoría completa.
- (2) Construya un conjunto finito Ax de axiomas tal que $Th(Ax)$ sea una teoría completa.

Caracterizando las teorías completas

Definición

Dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ son elementalmente equivalentes si para toda $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Caracterizando las teorías completas

Definición

Dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ son elementalmente equivalentes si para toda $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Ejercicio

Si dos estructuras son isomorfas entonces son elementalmente equivalentes, pero lo opuesto no es cierto:

- (1) Encuentre un vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tales que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes y no isomorfas

Caracterizando las teorías completas

La noción de equivalencia elemental puede usarse para caracterizar las teorías completas.

Caracterizando las teorías completas

La noción de equivalencia elemental puede usarse para caracterizar las teorías completas.

Teorema

Una teoría Σ es completa si y sólo si para cada par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ que satisfacen Σ , $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes.

Caracterizando las teorías completas

La noción de equivalencia elemental puede usarse para caracterizar las teorías completas.

Teorema

Una teoría Σ es completa si y sólo si para cada par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ que satisfacen Σ , $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorías categóricas

Una teoría completa define a sus modelos *hasta* equivalencia elemental.

- ▶ ¿Puede una teoría definir sus modelos de manera más estricta?

Teorías categóricas

Una teoría completa define a sus modelos *hasta* equivalencia elemental.

- ¿Puede una teoría definir sus modelos de manera más estricta?

Definición

Una teoría Σ es categórica si para cada par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ que satisfacen Σ , $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfas.

Teorías categóricas

Una teoría completa define a sus modelos *hasta* equivalencia elemental.

- ¿Puede una teoría definir sus modelos de manera más estricta?

Definición

Una teoría Σ es categórica si para cada par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ que satisfacen Σ , $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfas.

Ejercicio

Construya un conjunto finito de axiomas Ax tal que $\text{Th}(Ax)$ sea una teoría categórica.

Teorías completas y teorías categóricas

Teorema

Si Σ es una teoría categórica, entonces Σ es una teoría completa.

Teorías completas y teorías categóricas

Teorema

Si Σ es una teoría categórica, entonces Σ es una teoría completa.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorías completas y teorías categóricas

Teorema

Si Σ es una teoría categórica, entonces Σ es una teoría completa.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Vamos a mostrar que la dirección opuesta no es cierta.

- ▶ De hecho vamos a mostrar que no es cierta ni siquiera para el caso de las teorías generadas a partir de una estructura

Una teoría completa y no categórica

Proposición

$Th(\mathfrak{N})$ no es una teoría categórica.

Una teoría completa y no categórica

Proposición

$Th(\mathfrak{N})$ no es una teoría categórica.

Demostración: Vamos a construir una estructura $\mathfrak{N}^{ne}$ tal que $\mathfrak{N}^{ne}$ satisface $Th(\mathfrak{N})$ y no es isomorfo a $\mathfrak{N}$.

- ▶ $\mathfrak{N}^{ne}$ es llamado un modelo *no estándar* de la aritmética

Una teoría completa y no categórica

Proposición

$Th(\mathfrak{N})$ no es una teoría categórica.

Demostración: Vamos a construir una estructura $\mathfrak{N}^{ne}$ tal que $\mathfrak{N}^{ne}$ satisface $Th(\mathfrak{N})$ y no es isomorfo a $\mathfrak{N}$.

- ▶ $\mathfrak{N}^{ne}$ es llamado un modelo *no estándar* de la aritmética

Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$ y $\mathcal{L}_c = \mathcal{L} \cup \{c\}$

- ▶ $\mathcal{L}$ es el lenguaje estándar de la aritmética

$\text{Th}(\mathfrak{N})$ no es categórica: Demostración

Sea:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 0 < c \\ \lambda_n &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ símbolos } 1} < c \quad \text{para todo } n \geq 1\end{aligned}$$

Además, sea $\Sigma = \text{Th}(\mathfrak{N}) \cup \{\lambda_n \mid n \geq 0\}$

$\text{Th}(\mathfrak{N})$ no es categórica: Demostración

Cada subconjunto finito Γ de Σ es satisfacible.

Sea $\ell = \text{máx}(\{0\} \cup \{n \mid \lambda_n \in \Gamma\})$ y:

$$\mathfrak{A} = \langle A, 0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}}, s^{\mathfrak{A}}, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}, <^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}} \rangle,$$

donde $A = \mathbb{N}$, los símbolos 0 , 1 , s , $+$, $\cdot$ y $<$ son interpretados como en $\mathfrak{N}$, y $c^{\mathfrak{A}} = \ell + 1$.

Se tiene que $\mathfrak{A} \models \Gamma$

$\text{Th}(\mathfrak{N})$ no es categórica: Demostración

Por teorema de compacidad: Existe una $\mathcal{L}_c$ -estructura $\mathfrak{B}$ que satisface Σ

$\text{Th}(\mathfrak{N})$ no es categórica: Demostración

Por teorema de compacidad: Existe una $\mathcal{L}_c$ -estructura $\mathfrak{B}$ que satisface Σ

Sea $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ la restricción de $\mathfrak{B}$ a los símbolos de $\mathcal{L}$.

$\text{Th}(\mathfrak{N})$ no es categórica: Demostración

Por teorema de compacidad: Existe una $\mathcal{L}_c$ -estructura $\mathfrak{B}$ que satisface Σ

Sea $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ la restricción de $\mathfrak{B}$ a los símbolos de $\mathcal{L}$.

Tenemos que:

- ▶ $\mathfrak{N}^{\text{ne}} \models \text{Th}(\mathfrak{N})$
- ▶ $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ son elementalmente equivalentes
- ▶ $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ no son isomorfos
 - ▶ ¿Cómo se demuestra esto?

$\text{Th}(\mathfrak{N})$ no es categórica: Demostración

Por teorema de compacidad: Existe una $\mathcal{L}_c$ -estructura $\mathfrak{B}$ que satisface Σ

Sea $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ la restricción de $\mathfrak{B}$ a los símbolos de $\mathcal{L}$.

Tenemos que:

- ▶ $\mathfrak{N}^{\text{ne}} \models \text{Th}(\mathfrak{N})$
- ▶ $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ son elementalmente equivalentes
- ▶ $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ no son isomorfos
 - ▶ ¿Cómo se demuestra esto?

Concluimos que $\text{Th}(\mathfrak{N})$ no es una teoría categórica.

Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

¿Cómo podemos estudiar la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

- ▶ ¡Conocemos las oraciones que son verdaderas en $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$!

Sean $\varphi_0(x) = \forall y \neg(y < x)$ y

$$\varphi_{\text{mín_único}} = \exists x (\varphi_0(x) \wedge \forall y (\varphi_0(y) \rightarrow x = y))$$

$$\varphi_{\text{sucesor}} = \forall x (x < x + 1 \wedge \neg \exists z (x < z \wedge z < x + 1))$$

Como $\mathfrak{N} \models \varphi_{\text{mín_único}} \wedge \varphi_{\text{sucesor}}$, tenemos que $\mathfrak{N}^{\text{ne}} \models \varphi_{\text{mín_único}} \wedge \varphi_{\text{sucesor}}$, por lo que $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ contiene lo siguiente:

Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

¿Cómo podemos estudiar la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

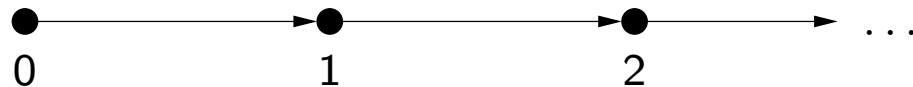
- ¡Conocemos las oraciones que son verdaderas en $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$!

Sean $\varphi_0(x) = \forall y \neg(y < x)$ y

$$\varphi_{\text{mín-único}} = \exists x (\varphi_0(x) \wedge \forall y (\varphi_0(y) \rightarrow x = y))$$

$$\varphi_{\text{sucesor}} = \forall x (x < x + 1 \wedge \neg \exists z (x < z \wedge z < x + 1))$$

Como $\mathfrak{N} \models \varphi_{\text{mín-único}} \wedge \varphi_{\text{sucesor}}$, tenemos que $\mathfrak{N}^{\text{ne}} \models \varphi_{\text{mín-único}} \wedge \varphi_{\text{sucesor}}$, por lo que $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ contiene lo siguiente:



Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

Sea:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{predecesor}} &= \forall x (\neg \varphi_0(x) \rightarrow \exists y (y + 1 = x)) \\ \varphi_{\text{suma_igual}} &= \forall x \forall y \forall z (x + z = y + z \rightarrow x = y) \\ \varphi_{\text{suma_menor}} &= \forall x \forall y \forall z (x + z < y + z \rightarrow x < y)\end{aligned}$$

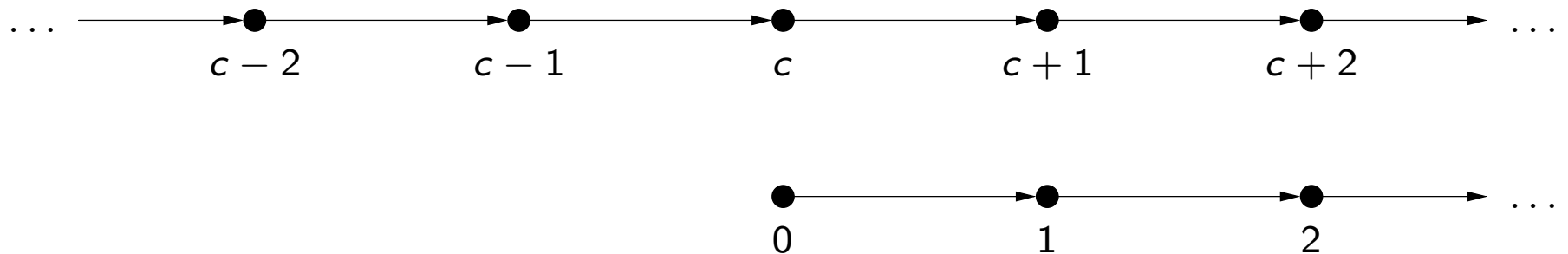
Como $\mathfrak{N} \models \varphi_{\text{predecesor}} \wedge \varphi_{\text{suma_igual}} \wedge \varphi_{\text{suma_menor}}$, $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ contiene lo siguiente:

Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

Sea:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{predecesor}} &= \forall x (\neg \varphi_0(x) \rightarrow \exists y (y + 1 = x)) \\ \varphi_{\text{suma_igual}} &= \forall x \forall y \forall z (x + z = y + z \rightarrow x = y) \\ \varphi_{\text{suma_menor}} &= \forall x \forall y \forall z (x + z < y + z \rightarrow x < y)\end{aligned}$$

Como $\mathfrak{N} \models \varphi_{\text{predecesor}} \wedge \varphi_{\text{suma_igual}} \wedge \varphi_{\text{suma_menor}}$, $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ contiene lo siguiente:



Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

Sea:

$$\varphi_{\text{menor_suma}} = \forall x \forall y \forall z (x < y \rightarrow x + z < y + z)$$

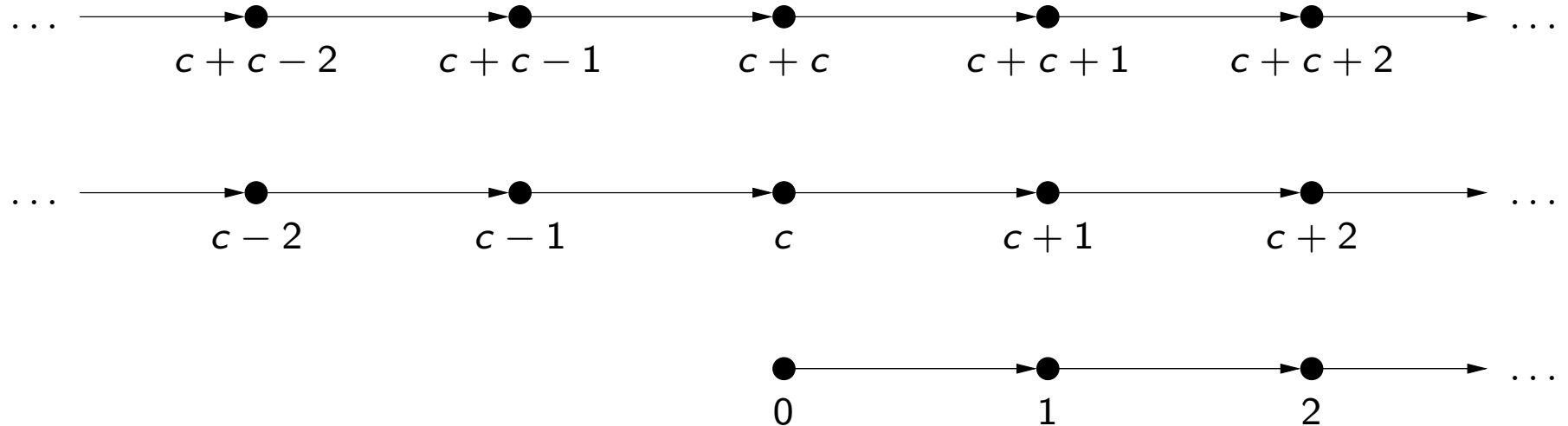
Como $\mathfrak{N} \models \varphi_{\text{menor_suma}}$, $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ contiene lo siguiente:

Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

Sea:

$$\varphi_{\text{menor_suma}} = \forall x \forall y \forall z (x < y \rightarrow x + z < y + z)$$

Como $\mathfrak{N} \models \varphi_{\text{menor_suma}}$, $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ contiene lo siguiente:



Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

Para $k \geq 1$, sea $\varphi_k(x) = (x = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k \text{ símbolos } 1})$, y además sean:

$$\varphi_{\text{mult}_k} = \forall x (\varphi_k(x) \rightarrow \forall y (\underbrace{y + \cdots + y}_{k \text{ símbolos } y} = x \cdot y))$$

$$\varphi_{\text{trans_menor}} = \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$$

$$\varphi_{\text{menor_mult}} = \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge \neg \varphi_0(z)) \rightarrow x \cdot z < y \cdot z)$$

Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

Tenemos que:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{N} & \models \varphi_{\text{mult}_k} \\ \mathfrak{N} & \models \varphi_{\text{trans_menor}} \wedge \varphi_{\text{menor_mult}} \end{array} \quad \text{para todo } k \geq 1$$

Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

Por lo tanto, $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ contiene lo siguiente:

