

Teorías

IIC2213

¿Qué es una teoría?

Una teoría es un cúmulo de información.

- ▶ Debe estar libre de contradicciones
- ▶ Debe ser cerrada con respecto a lo que se puede deducir de ella

Inicialmente vamos a modelar esta noción en lógica de primer orden.

- ▶ También vamos a considerar lógicas de mayor orden

La teoría de una estructura

Dada una estructura $\mathfrak{A}$ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$, la teoría de $\mathfrak{A}$ se define como:

$$\text{Th}(\mathfrak{A}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

$\text{Th}(\mathfrak{A})$ satisface los principios antes enunciados:

- ▶ $\text{Th}(\mathfrak{A})$ es consistente: $\mathfrak{A} \models \text{Th}(\mathfrak{A})$
- ▶ $\text{Th}(\mathfrak{A})$ es cerrada bajo deducción: Si $\text{Th}(\mathfrak{A}) \models \varphi$, entonces $\varphi \in \text{Th}(\mathfrak{A})$

La teoría de una estructura: Ejemplos

Recuerde que:

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} &= \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, 1^{\mathfrak{N}}, s^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}, <^{\mathfrak{N}} \rangle \\ \mathfrak{R} &= \langle \mathbb{R}, 0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}}, s^{\mathfrak{R}}, +^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}}, <^{\mathfrak{R}} \rangle\end{aligned}$$

Dos teorías fundamentales:

- ▶ Aritmética: $\text{Th}(\mathfrak{N})$
- ▶ Teoría de los números reales: $\text{Th}(\mathfrak{R})$

La teoría generada a partir de un conjunto de axiomas

Ax: Conjunto de oraciones consistente sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

El conjunto de lo que se puede deducir a partir de Ax es definido como:

$$\text{Th}(\text{Ax}) = \{\varphi \mid \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-oración tal que } \text{Ax} \models \varphi\}$$

$\text{Th}(\text{Ax})$ satisface los principios antes enunciados:

- ▶ $\text{Th}(\text{Ax})$ es consistente: Si $\mathfrak{A} \models \text{Ax}$, entonces $\mathfrak{A} \models \text{Th}(\text{Ax})$
- ▶ $\text{Th}(\mathfrak{A})$ es cerrada bajo deducción: Si $\text{Th}(\text{Ax}) \models \varphi$, entonces $\varphi \in \text{Th}(\text{Ax})$

Teorías generadas a partir de axiomas: Ejemplos

Sea $\mathcal{L} = \{e, \circ\}$ y Gr el siguiente conjunto de axiomas:

$$\forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z)$$

$$\forall x ((x \circ e = x) \wedge (e \circ x = x))$$

$$\forall x \exists y ((x \circ y = e) \wedge (y \circ x = e))$$

Teoría de grupos: $\text{Th}(\text{Gr})$

Teoría: Definición formal

Dado: Conjunto Σ de oraciones sobre un vocabulario $\mathcal{L}$

Definición

Σ es una teoría si:

- (1) Σ es satisfacible
- (2) Σ es cerrado bajo consecuencia lógica: Si φ es una $\mathcal{L}$ -oración tal que $\Sigma \models \varphi$, entonces $\varphi \in \Sigma$

Ejemplo

$\text{Th}(\mathfrak{N})$, $\text{Th}(\mathfrak{R})$ y $\text{Th}(\text{Gr})$ son teorías.

Teorías completas

Definición

Una teoría Σ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ se dice completa si para cada $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\Sigma \models \varphi \quad \text{o} \quad \Sigma \models \neg\varphi$$

Ejemplo

$\text{Th}(\mathfrak{N})$ y $\text{Th}(\mathfrak{K})$ son teorías completas.

► ¿Por qué?

La teoría de una estructura es siempre completa

Teorema

$Th(\mathfrak{A})$ es una teoría completa, para cualquier estructura $\mathfrak{A}$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorías no completas

Una teoría generada a partir de un conjunto de axiomas no es necesariamente completa.

- ¿Por qué no funciona la demostración para $\text{Th}(\mathfrak{A})$ aquí?

Proposición

$\text{Th}(\text{Gr})$ no es una teoría completa.

Demostración: Sea φ la oración $\forall x \forall y (x \circ y = y \circ x)$. Vamos a demostrar que:

$$\text{Th}(\text{Gr}) \not\models \varphi \text{ y } \text{Th}(\text{Gr}) \not\models \neg \varphi$$

¿Qué nos dice esto?

La teoría de grupos no es completa: Demostración

Primero vamos a demostrar que $\text{Th}(\text{Gr}) \not\models \neg\varphi$.

- ▶ Es decir, vamos a construir un grupo conmutativo

Sea $\mathfrak{A} = \langle \mathbb{Z}, e^{\mathfrak{A}}, \circ^{\mathfrak{A}} \rangle$ definido como:

- ▶ $e^{\mathfrak{A}} = 0$
- ▶ Para cada $a, b \in \mathbb{Z}$: $a \circ^{\mathfrak{A}} b = a + b$

Se tiene que $\mathfrak{A} \models \text{Th}(\text{Gr})$ y $\mathfrak{A} \models \varphi$.

- ▶ Concluimos que $\text{Th}(\text{Gr}) \not\models \neg\varphi$

La teoría de grupos no es completa: Demostración

Ahora vamos a demostrar que $\text{Th}(\text{Gr}) \not\models \varphi$.

- ▶ Es decir, vamos a construir un grupo **no** conmutativo

Sea $\mathfrak{B} = \langle B, e^{\mathfrak{B}}, \circ^{\mathfrak{B}} \rangle$ definido como:

- ▶ B es el conjunto de las funciones $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ que son 1-1
- ▶ $e^{\mathfrak{B}}$ es la función identidad
- ▶ $\circ^{\mathfrak{B}}$ es interpretada como la composición de funciones.
 - ▶ $(f_1 \circ^{\mathfrak{B}} f_2)(x) = f_1(f_2(x))$

¿Cuántos elementos tiene B ? ¿Por qué está bien definido $\circ^{\mathfrak{B}}$?

La teoría de grupos no es completa: Demostración

Tenemos que $\mathfrak{B} \models \text{Th}(\text{Gr})$

► Para cada $f \in B$: $f^{-1} \in B$ y $(f \circ^{\mathfrak{B}} f^{-1}) = (f^{-1} \circ^{\mathfrak{B}} f) = e^{\mathfrak{B}}$

Pero $\mathfrak{B} \not\models \varphi$. Considere los siguientes elementos de B :

$$\begin{array}{llll} f_1(1) & = & 2 & f_2(1) & = & 1 \\ f_1(2) & = & 3 & f_2(2) & = & 3 \\ f_1(3) & = & 1 & f_2(3) & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} g(1) & = & 2 & h(1) & = & 3 \\ g(2) & = & 1 & h(2) & = & 2 \\ g(3) & = & 3 & h(3) & = & 1 \end{array}$$

Se tiene que $(f_1 \circ^{\mathfrak{B}} f_2) = g$ y $(f_2 \circ^{\mathfrak{B}} f_1) = h$

► Concluimos que $\text{Th}(\text{Gr}) \not\models \varphi$

Teorías completas generadas a partir de axiomas

Ejercicio

- (1) Construya un conjunto infinito Ax de axiomas tal que $Th(Ax)$ sea una teoría completa.
- (2) Construya un conjunto finito Ax de axiomas tal que $Th(Ax)$ sea una teoría completa.

Caracterizando las teorías completas

Definición

Dos estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ sobre un vocabulario $\mathcal{L}$ son elementalmente equivalentes si para toda $\mathcal{L}$ -oración φ :

$$\mathfrak{A} \models \varphi \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{B} \models \varphi$$

Ejercicio

Si dos estructuras son isomorfas entonces son elementalmente equivalentes, pero lo opuesto no es cierto:

- (1) Encuentre un vocabulario $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ -estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ tales que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes y no isomorfas

Caracterizando las teorías completas

La noción de equivalencia elemental puede usarse para caracterizar las teorías completas.

Teorema

Una teoría Σ es completa si y sólo si para cada par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ que satisfacen Σ , $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son elementalmente equivalentes.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Teorías categóricas

Una teoría completa define a sus modelos *hasta* equivalencia elemental.

- ¿Puede una teoría definir sus modelos de manera más estricta?

Definición

Una teoría Σ es categórica si para cada par de estructuras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ que satisfacen Σ , $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son isomorfas.

Ejercicio

Construya un conjunto finito de axiomas Ax tal que $Th(Ax)$ sea una teoría categórica.

Teorías completas y teorías categóricas

Teorema

Si Σ es una teoría categórica, entonces Σ es una teoría completa.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Vamos a mostrar que la dirección opuesta no es cierta.

- ▶ De hecho vamos a mostrar que no es cierta ni siquiera para el caso de las teorías generadas a partir de una estructura

Una teoría completa y no categórica

Proposición

$Th(\mathfrak{N})$ no es una teoría categórica.

Demostración: Vamos a construir una estructura $\mathfrak{N}^{ne}$ tal que $\mathfrak{N}^{ne}$ satisface $Th(\mathfrak{N})$ y no es isomorfo a $\mathfrak{N}$.

- ▶ $\mathfrak{N}^{ne}$ es llamado un modelo *no estándar* de la aritmética

Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$ y $\mathcal{L}_c = \mathcal{L} \cup \{c\}$

- ▶ $\mathcal{L}$ es el lenguaje estándar de la aritmética

$\text{Th}(\mathfrak{N})$ no es categórica: Demostración

Sea:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 0 < c \\ \lambda_n &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ símbolos } 1} < c \quad \text{para todo } n \geq 1\end{aligned}$$

Además, sea $\Sigma = \text{Th}(\mathfrak{N}) \cup \{\lambda_n \mid n \geq 0\}$

$\text{Th}(\mathfrak{N})$ no es categórica: Demostración

Cada subconjunto finito Γ de Σ es satisfacible.

Sea $\ell = \text{máx}(\{0\} \cup \{n \mid \lambda_n \in \Gamma\})$ y:

$$\mathfrak{A} = \langle A, 0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}}, s^{\mathfrak{A}}, +^{\mathfrak{A}}, \cdot^{\mathfrak{A}}, <^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{A}} \rangle,$$

donde $A = \mathbb{N}$, los símbolos 0 , 1 , s , $+$, $\cdot$ y $<$ son interpretados como en $\mathfrak{N}$, y $c^{\mathfrak{A}} = \ell + 1$.

Se tiene que $\mathfrak{A} \models \Gamma$

$\text{Th}(\mathfrak{N})$ no es categórica: Demostración

Por teorema de compacidad: Existe una $\mathcal{L}_c$ -estructura $\mathfrak{B}$ que satisface Σ

Sea $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ la restricción de $\mathfrak{B}$ a los símbolos de $\mathcal{L}$.

Tenemos que:

- ▶ $\mathfrak{N}^{\text{ne}} \models \text{Th}(\mathfrak{N})$
- ▶ $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ son elementalmente equivalentes
- ▶ $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ no son isomorfos
 - ▶ ¿Cómo se demuestra esto?

Concluimos que $\text{Th}(\mathfrak{N})$ no es una teoría categórica.

Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

¿Cómo podemos estudiar la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

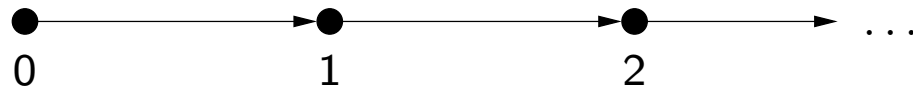
- ¡Conocemos las oraciones que son verdaderas en $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$!

Sean $\varphi_0(x) = \forall y \neg(y < x)$ y

$$\varphi_{\text{mín-único}} = \exists x (\varphi_0(x) \wedge \forall y (\varphi_0(y) \rightarrow x = y))$$

$$\varphi_{\text{sucesor}} = \forall x (x < x + 1 \wedge \neg \exists z (x < z \wedge z < x + 1))$$

Como $\mathfrak{N} \models \varphi_{\text{mín-único}} \wedge \varphi_{\text{sucesor}}$, tenemos que $\mathfrak{N}^{\text{ne}} \models \varphi_{\text{mín-único}} \wedge \varphi_{\text{sucesor}}$, por lo que $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ contiene lo siguiente:

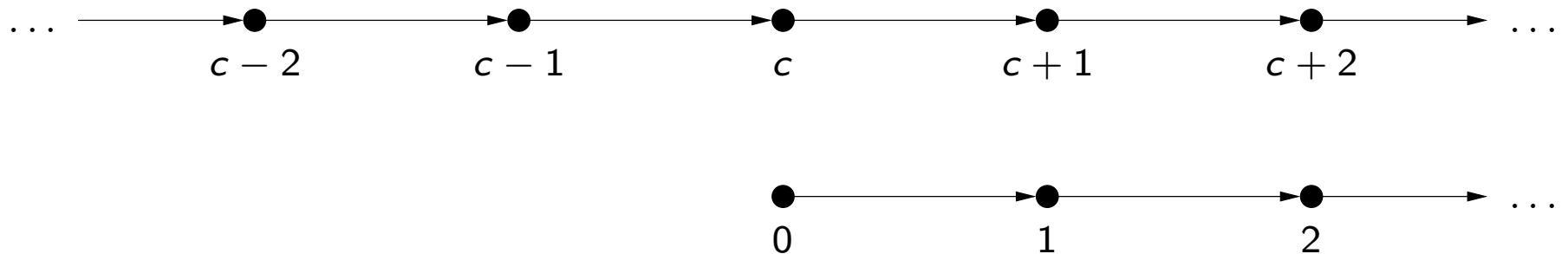


Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

Sea:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{predecesor}} &= \forall x (\neg \varphi_0(x) \rightarrow \exists y (y + 1 = x)) \\ \varphi_{\text{suma_igual}} &= \forall x \forall y \forall z (x + z = y + z \rightarrow x = y) \\ \varphi_{\text{suma_menor}} &= \forall x \forall y \forall z (x + z < y + z \rightarrow x < y)\end{aligned}$$

Como $\mathfrak{N} \models \varphi_{\text{predecesor}} \wedge \varphi_{\text{suma_igual}} \wedge \varphi_{\text{suma_menor}}$, $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ contiene lo siguiente:

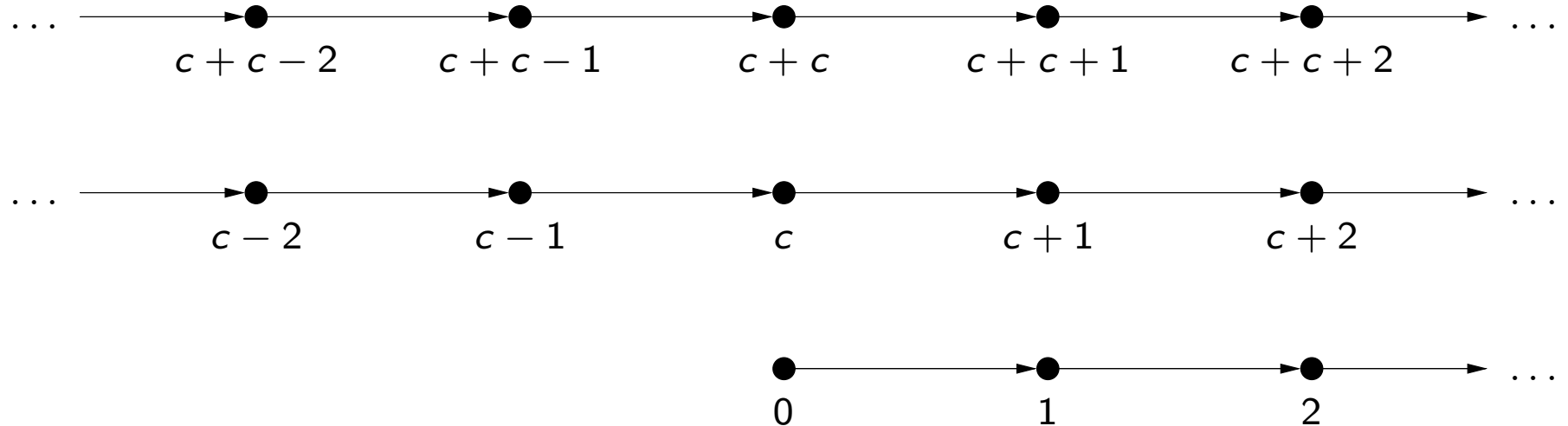


Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

Sea:

$$\varphi_{\text{menor_suma}} = \forall x \forall y \forall z (x < y \rightarrow x + z < y + z)$$

Como $\mathfrak{N} \models \varphi_{\text{menor_suma}}$, $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ contiene lo siguiente:



Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

Para $k \geq 1$, sea $\varphi_k(x) = (x = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k \text{ símbolos } 1})$, y además sean:

$$\varphi_{\text{mult}_k} = \forall x (\varphi_k(x) \rightarrow \forall y (\underbrace{y + \cdots + y}_{k \text{ símbolos } y} = x \cdot y))$$

$$\varphi_{\text{trans_menor}} = \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$$

$$\varphi_{\text{menor_mult}} = \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge \neg \varphi_0(z)) \rightarrow x \cdot z < y \cdot z)$$

Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

Tenemos que:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{N} & \models \varphi_{\text{mult}_k} \\ \mathfrak{N} & \models \varphi_{\text{trans_menor}} \wedge \varphi_{\text{menor_mult}} \end{array} \quad \text{para todo } k \geq 1$$

Paréntesis: ¿Cómo es la estructura de $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$?

Por lo tanto, $\mathfrak{N}^{\text{ne}}$ contiene lo siguiente:

