

Resolución Proposicional

IIC2213

Sabemos que $\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

¿Cómo verificamos si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente?

- ▶ El método basado en tablas de verdad es demasiado lento
- ▶ Necesitamos un método alternativo que no construya tablas de verdad

Reducción a cláusulas

Notación

Una *cláusula* es una disyunción de literales.

Ejemplo

$$p \vee \neg q \vee \neg r$$

Reducción a cláusulas

Notación

Una *cláusula* es una disyunción de literales.

Ejemplo

$$p \vee \neg q \vee \neg r$$

Una fórmula φ está en CNF si es de la forma $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n$, donde cada C_i es una cláusula.

- Podemos representar φ como $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$. ¿Por qué?

Reducción a cláusulas

Notación

Una *cláusula* es una disyunción de literales.

Ejemplo

$$p \vee \neg q \vee \neg r$$

Una fórmula φ está en CNF si es de la forma $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n$, donde cada C_i es una cláusula.

- Podemos representar φ como $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$. ¿Por qué?

Notación

También usamos $\equiv$ para denotar equivalencia entre conjuntos de fórmulas.

Reducción a cláusulas

Toda fórmula es equivalente a un conjunto de cláusulas.

Ejemplo

$$\begin{aligned}(p \vee q) \rightarrow r &\equiv \neg(p \vee q) \vee r \\ &\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r \\ &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \\ &\equiv \{\neg p \vee r, \neg q \vee r\}\end{aligned}$$

Entonces: Nos basta con resolver el problema de satisfacibilidad para conjuntos de cláusulas.

La regla de resolución

¿Cómo verificamos si un conjunto de cláusulas es inconsistente?

Sabemos que Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \models \varphi$, donde φ es una contradicción cualquiera.

Entonces: Fijamos una contradicción $\square$ y lo que hacemos es verificar si $\Sigma \models \square$.

La regla de resolución

¿Cómo verificamos si un conjunto de cláusulas es inconsistente?

Sabemos que Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \models \varphi$, donde φ es una contradicción cualquiera.

Entonces: Fijamos una contradicción $\square$ y lo que hacemos es verificar si $\Sigma \models \square$.

Notación

Decimos que $\square$ es la cláusula vacía porque una cláusula sin literales no es satisfacible.

La regla de resolución

Para verificar que $\Sigma \models \square$ no queremos usar valuaciones, queremos usar alguna regla sintáctica.

Notación

Si $I = p$, entonces $\bar{I} = \neg p$, y si $I = \neg p$, entonces $\bar{I} = p$.

La regla de resolución

Para verificar que $\Sigma \models \square$ no queremos usar valuaciones, queremos usar alguna regla sintáctica.

Notación

Si $I = p$, entonces $\bar{I} = \neg p$, y si $I = \neg p$, entonces $\bar{I} = p$.

Regla de resolución

Dadas cláusulas C_1, C_2, C_3, C_4 y literal I :

$$\frac{\begin{array}{c} C_1 \vee I \vee C_2 \\ C_3 \vee \bar{I} \vee C_4 \end{array}}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

La regla de resolución

Para verificar que $\Sigma \models \square$ no queremos usar valuaciones, queremos usar alguna regla sintáctica.

Notación

Si $l = p$, entonces $\bar{l} = \neg p$, y si $l = \neg p$, entonces $\bar{l} = p$.

Regla de resolución

Dadas cláusulas C_1, C_2, C_3, C_4 y literal l :

$$\frac{C_1 \vee l \vee C_2 \quad C_3 \vee \bar{l} \vee C_4}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

La regla es correcta: $\{C_1 \vee l \vee C_2, C_3 \vee \bar{l} \vee C_4\} \models C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4$

La regla de resolución: Ejemplo

Ejemplo

$$\frac{\neg p \vee q \quad \neg q \vee r}{\neg p \vee r}$$

Tenemos que: $\{\neg p \vee q, \neg q \vee r\} \models \neg p \vee r$

La regla de resolución: Casos particulares

Algunos casos particulares de la regla de resolución:

$$\frac{C_1 \vee I \vee C_2}{\bar{I}} \quad \frac{I}{\bar{I}} \quad \frac{}{\square}$$

En el último caso estamos diciendo que $\{I, \bar{I}\}$ es inconsistente.

Demostraciones por resolución

Dado: Conjunto de cláusulas Σ y una cláusula C .

Definición

Una demostración por resolución de C desde Σ es una secuencia de cláusulas $C_1, C_2, \dots, C_n$ tal que:

- ▶ *Para cada $i \leq n$:*
 - $C_i \in \Sigma$ o
 - *existen $j, k < i$ tales que C_i es obtenido desde C_j y C_k usando la regla de resolución*
- ▶ $C_n = C$

Demostraciones por resolución

Dado: Conjunto de cláusulas Σ y una cláusula C .

Definición

Una demostración por resolución de C desde Σ es una secuencia de cláusulas $C_1, C_2, \dots, C_n$ tal que:

- ▶ *Para cada $i \leq n$:*
 - $C_i \in \Sigma$ o
 - *existen $j, k < i$ tales que C_i es obtenido desde C_j y C_k usando la regla de resolución*
- ▶ $C_n = C$

Notación

$\Sigma \vdash C$

Demostraciones por resolución: Ejemplo

Ejemplo

$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s\}$ y $C = q \vee r \vee s$

Una demostración de C desde Σ :

- | | | |
|-----|-------------------|-------------------------|
| (1) | $p \vee q \vee r$ | pertenece a Σ |
| (2) | $\neg p \vee s$ | pertenece a Σ |
| (3) | $q \vee r \vee s$ | resolución de (1) y (2) |

¿Existe otra demostración de C desde Σ ?

Demostraciones por resolución: Otro Ejemplo

Ejemplo

$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$ y $C = \square$

- | | | |
|------|-------------------|--------------------------|
| (1) | $p \vee q \vee r$ | pertenece a Σ |
| (2) | $\neg p \vee s$ | pertenece a Σ |
| (3) | $q \vee r \vee s$ | resolución de (1) y (2) |
| (4) | $\neg q \vee s$ | pertenece a Σ |
| (5) | $r \vee s \vee s$ | resolución de (3) y (4) |
| (6) | $\neg r \vee s$ | pertenece a Σ |
| (7) | $s \vee s \vee s$ | resolución de (5) y (6) |
| (8) | $\neg s$ | pertenece a Σ |
| (9) | $s \vee s$ | resolución de (7) y (8) |
| (10) | s | resolución de (8) y (9) |
| (11) | $\square$ | resolución de (8) y (10) |

La regla de factorización

Como la regla de resolución es puramente sintáctica, desde $q \vee r \vee s$ y $\neg q \vee s$ obtenemos $r \vee s \vee s$.

Regla de factorización

Dadas cláusulas C_1 , C_2 , C_3 y un literal l :

$$\frac{C_1 \vee l \vee C_2 \vee l \vee C_3}{C_1 \vee l \vee C_2 \vee C_3}$$

La regla es correcta: $\{C_1 \vee l \vee C_2 \vee l \vee C_3\} \models C_1 \vee l \vee C_2 \vee C_3$

La regla de factorización

Una demostración por resolución puede usar tanto la regla de resolución como la de factorización.

Definición

Una demostración por resolución de C desde Σ es una secuencia de cláusulas $C_1, C_2, \dots, C_n$ tal que:

- ▶ *Para cada $i \leq n$:*
 - $C_i \in \Sigma$ o
 - existe $j < i$ tal que C_i es obtenido desde C_j usando la regla de factorización o
 - existen $j, k < i$ tales que C_i es obtenido desde C_j y C_k usando la regla de resolución
- ▶ $C_n = C$

La regla de factorización

Una demostración por resolución puede usar tanto la regla de resolución como la de factorización.

Definición

Una demostración por resolución de C desde Σ es una secuencia de cláusulas $C_1, C_2, \dots, C_n$ tal que:

- ▶ *Para cada $i \leq n$:*
 - $C_i \in \Sigma$ o
 - existe $j < i$ tal que C_i es obtenido desde C_j usando la regla de factorización o
 - existen $j, k < i$ tales que C_i es obtenido desde C_j y C_k usando la regla de resolución
- ▶ $C_n = C$

Notación

Seguimos usando $\Sigma \vdash C$

La regla de factorización: Ejemplo

Ejemplo

$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$ y $C = \square$

- | | | |
|------|-------------------|--------------------------|
| (1) | $p \vee q \vee r$ | pertenece a Σ |
| (2) | $\neg p \vee s$ | pertenece a Σ |
| (3) | $q \vee r \vee s$ | resolución de (1) y (2) |
| (4) | $\neg q \vee s$ | pertenece a Σ |
| (5) | $r \vee s \vee s$ | resolución de (3) y (4) |
| (6) | $r \vee s$ | factorización de (5) |
| (7) | $\neg r \vee s$ | pertenece a Σ |
| (8) | $s \vee s$ | resolución de (6) y (7) |
| (9) | s | factorización de (8) |
| (10) | $\neg s$ | pertenece a Σ |
| (11) | $\square$ | resolución de (9) y (10) |

Podríamos agregar otras reglas a nuestro sistema de demostración.
¿Cómo sabemos si un conjunto de reglas es *bueno*?

Usamos dos criterios:

- ▶ Correctitud
- ▶ Completitud

Correctitud de resolución

Correctitud: Si C se puede deducir desde Σ usando el conjunto de reglas, entonces $\Sigma \models C$.

Teorema (correctitud de resolución)

Si $\Sigma \vdash C$, entonces $\Sigma \models C$.

Correctitud de resolución

Correctitud: Si C se puede deducir desde Σ usando el conjunto de reglas, entonces $\Sigma \models C$.

Teorema (correctitud de resolución)

Si $\Sigma \vdash C$, entonces $\Sigma \models C$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Correctitud de resolución

Correctitud: Si C se puede deducir desde Σ usando el conjunto de reglas, entonces $\Sigma \models C$.

Teorema (correctitud de resolución)

Si $\Sigma \vdash C$, entonces $\Sigma \models C$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

Corolario

Si $\Sigma \vdash \square$, entonces Σ es inconsistente.

Completitud de resolución

Completitud: Si $\Sigma \models C$, entonces es posible deducir C desde Σ usando el conjunto de reglas.

Completitud de resolución

Completitud: Si $\Sigma \models C$, entonces es posible deducir C desde Σ usando el conjunto de reglas.

Ejercicio

Encuentre Σ y C tal que $\Sigma \models C$ y no es cierto que $\Sigma \vdash C$.

Completitud de resolución

Completitud: Si $\Sigma \models C$, entonces es posible deducir C desde Σ usando el conjunto de reglas.

Ejercicio

Encuentre Σ y C tal que $\Sigma \models C$ y no es cierto que $\Sigma \vdash C$.

Tenemos que agregar otras reglas si queremos completitud.

- Pero sólo queremos usar resolución para demostrar que un conjunto de cláusulas es inconsistente

Completitud de resolución

Completitud: Si $\Sigma \models C$, entonces es posible deducir C desde Σ usando el conjunto de reglas.

Ejercicio

Encuentre Σ y C tal que $\Sigma \models C$ y no es cierto que $\Sigma \vdash C$.

Tenemos que agregar otras reglas si queremos completitud.

- Pero sólo queremos usar resolución para demostrar que un conjunto de cláusulas es inconsistente

Forma débil de completitud

Si $\Sigma \models \square$, entonces es posible deducir $\square$ desde Σ usando el conjunto de reglas.

Completitud de resolución

Teorema (completitud débil de resolución)

Si $\Sigma \models \Box$, entonces $\Sigma \vdash \Box$.

Completitud de resolución

Teorema (completitud débil de resolución)

Si $\Sigma \models \Box$, entonces $\Sigma \vdash \Box$.

Corolario

Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \vdash \Box$.

Completitud de resolución

Teorema (completitud débil de resolución)

Si $\Sigma \models \Box$, entonces $\Sigma \vdash \Box$.

Corolario

Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \vdash \Box$.

¡Podemos usar resolución para verificar si un conjunto de cláusulas es inconsistente!

Completitud de resolución

Teorema (completitud débil de resolución)

Si $\Sigma \models \Box$, entonces $\Sigma \vdash \Box$.

Corolario

Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \vdash \Box$.

¡Podemos usar resolución para verificar si un conjunto de cláusulas es inconsistente!

Ejercicio

Demuestre el teorema de completitud (hágalo por inducción en el número de letras proposicionales mencionadas en Σ).

Resolución proposicional: Comentarios finales

- ▶ Suponga que Σ es infinito. ¿Es cierto que Σ es inconsistente si y sólo si $\Sigma \vdash \square$?
- ▶ Sean C_1, C_2, C_3, C_4 cláusulas y l_1, l_2 literales. ¿Es la siguiente regla correcta?

$$\frac{C_1 \vee l_1 \vee l_2 \vee C_2 \quad C_3 \vee \bar{l}_1 \vee \bar{l}_2 \vee C_4}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

- ▶ ¿Es conveniente agregar otras reglas de deducción a nuestro sistema de demostración?