

El sistema de Hilbert: Lógica de Primer Orden

El sistema de deducción de Hilbert para la lógica de primer orden consta de los siguientes elementos:

► Esquemas para generar fórmulas válidas:

(a) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

(b) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$

(c) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$

(d) $(\forall x \varphi(x)) \rightarrow \varphi(t)$, donde t es un término cualquiera

(e) $\varphi(t) \rightarrow (\exists x \varphi(x))$, donde t es un término cualquiera

(f) $(\exists x \varphi) \leftrightarrow (\neg \forall x \neg \varphi)$

El sistema de Hilbert: Lógica de Primer Orden

► Axiomas para la igualdad:

(a) $\forall x (x = x)$

(b) $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$

(c) $\forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$

(d) Para todo predicado m -ario P :

$$\forall x_1 \cdots \forall x_m \forall y_1 \cdots \forall y_m ((P(x_1, \dots, x_m) \wedge \\ x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_m = y_m) \rightarrow P(y_1, \dots, y_m))$$

(e) Para toda función n -aria f :

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n ((x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n) \rightarrow \\ f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n))$$

El sistema de Hilbert: Lógica de Primer Orden

► Reglas de inferencia:

(a) Modus Ponens:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi}$$

(b) Generalización: Si y no aparece libre en φ , entonces

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi(y)}{\varphi \rightarrow \forall y \psi(y)}$$

El sistema de Hilbert: Lógica de Primer Orden

Definición

Dado un conjunto de fórmulas $\Sigma \cup \{\varphi\}$, una deducción formal de φ desde Σ es una secuencia de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ tal que:

- ▶ *Para cada $i \leq n$:*
 - ▶ $\varphi_i \in \Sigma$ o
 - ▶ φ_i es un axioma lógico o
 - ▶ existen $j, k < i$ tales que φ_i es obtenido desde φ_j y φ_k usando *modus ponens* o
 - ▶ existe $j < i$ tal que φ_i es obtenido desde φ_j usando la regla de *generalización*
- ▶ $\varphi_n = \varphi$

Notación

$\Sigma \vdash_H \varphi$

El sistema de Hilbert: Propiedades

Teorema (Corrección)

Dado un conjunto de fórmulas $\Sigma \cup \{\varphi\}$, si $\Sigma \vdash_H \varphi$, entonces $\Sigma \models \varphi$.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

El sistema de Hilbert: Propiedades

Teorema (Complejidad de Gödel)

Dado un conjunto de fórmulas $\Sigma \cup \{\varphi\}$, si $\Sigma \models \varphi$, entonces $\Sigma \vdash_H \varphi$.

Corolario (Compacidad)

Un conjunto de fórmulas Σ es satisfacible si y sólo si Σ es finitamente satisfacible.

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Teorema de compacidad y el problema de definibilidad

Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario y $\text{STRUCT}[\mathcal{L}]$ el conjunto de las $\mathcal{L}$ -estructuras

Una propiedad P sobre las $\mathcal{L}$ -estructuras es un subconjunto de $\text{STRUCT}[\mathcal{L}]$

- ▶ Ejemplo: $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \text{ y el dominio de } \mathfrak{A} \text{ tiene al menos dos elementos}\}$

Teorema de compacidad y el problema de definibilidad

Una propiedad P se dice definible en lógica de primer orden si existe una $\mathcal{L}$ -oración Φ tal que:

$$\mathfrak{A} \in P \quad \text{si y sólo si} \quad \mathfrak{A} \models \Phi$$

Ejercicio

¿Qué propiedad define la $\mathcal{L}$ -oración $\exists x \exists y \neg(x = y)$?

Teorema de compacidad y el problema de definibilidad

¿Qué herramientas podemos usar para demostrar que una propiedad no es definible?

- Podemos usar el teorema de compacidad

Veamos un ejemplo: Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario arbitrario y

$$\text{FIN} = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in \text{STRUCT}[\mathcal{L}] \text{ y el dominio de } \mathfrak{A} \text{ es finito}\}$$

Vamos a demostrar que FIN no es definible en lógica de primer orden.

Teorema de compacidad y el problema de definibilidad

Por contradicción, suponemos que FIN es definible en lógica de primer orden.

- Existe $\mathcal{L}$ -oración Φ : $\mathfrak{A} \models \Phi$ si y sólo si el dominio de $\mathfrak{A}$ es finito

Para cada $n \geq 2$, defina la $\mathcal{L}$ -oración λ_n de la siguiente forma:

$$\lambda_n = \exists x_1 \cdots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right)$$

Además, defina Σ como el siguiente conjunto (infinito) de $\mathcal{L}$ -oraciones:

$$\Sigma = \{\Phi\} \cup \{\lambda_n \mid n \geq 2\}$$

Teorema de compacidad y el problema de definibilidad

Tenemos que cada subconjunto finito de Σ es satisfacible.

- ¿Por qué?

Por teorema de compacidad: Σ es satisfacible

- Existe una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ que satisface a Σ

Entonces: $\mathfrak{A}$ tiene un dominio infinito y $\mathfrak{A} \models \Phi$

- Obtenemos una contradicción