

Lógica de Primer Orden

IIC2213

Lógica de primer orden

Dos de los objetivos de la lógica proposicional:

- ▶ Poder modelar el proceso de razonamiento
- ▶ Poder formalizar la noción de demostración

¿Podemos expresar el siguiente argumento en lógica proposicional?

Todos los hombres son mortales

Sócrates es hombre

Por lo tanto, Sócrates es mortal

¿Podemos demostrar que para el conjunto de los números naturales es cierto que todo número es par o impar?

Lógica de primer orden

El poder expresivo de la lógica proposicional es limitado.

- ▶ ¿Por qué usamos esta lógica?

Vamos a introducir una lógica más expresiva.

- ▶ Tiene algunas de las buenas propiedades de la lógica proposicional, pero **no todas**

Para expresar el argumento mostrado al principio necesitamos cuantificadores: **para todo** y **existe**

Lógica de primer orden: Vocabulario

Una fórmula en lógica de primer orden está definida sobre algunas constantes, funciones y predicados.

Notación

Un vocabulario $\mathcal{L}$ es la unión de tres conjuntos:

$$\begin{array}{lll} \text{constantes} & : & \{c_1, \dots, c_\ell, \dots\} \\ \text{funciones} & : & \{f_1, \dots, f_m, \dots\} \\ \text{relaciones} & : & \{R_1, \dots, R_n, \dots\} \end{array}$$

Notación

La **aridad** de una función f (relación R) es el número de argumentos de f (de R).

- ▶ *Cada función tiene una aridad mayor a 0*
- ▶ *Cada relación tiene una aridad mayor o igual a 0*

Lógica de primer orden: Vocabulario

Ejemplo

Para los números naturales $\mathcal{L}$ es la unión de

constantes	:	$\{0, 1\}$
funciones	:	$\{s, +, \cdot\}$
relaciones	:	$\{<\}$

s es una función unaria, $+$ y $\cdot$ son funciones binarias y $<$ es una relación binaria.

Lógica de primer orden: Sintaxis

Las fórmulas de la lógica de primer orden se construyen usando:

- ▶ Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$
- ▶ Paréntesis: (y)
- ▶ Relación binaria =
- ▶ Variables
- ▶ Cuantificadores: $\forall$ y $\exists$

Veamos algunos ejemplos, antes de introducir formalmente la sintaxis de la lógica de primer orden.

Sintaxis de la lógica de primer orden: Ejemplos

Sea $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$

► $1 = s(0)$

Para la igualdad usamos notación infija: No escribimos $= (1, s(0))$

► $\forall x \ x < s(x)$

Usamos notación infija para funciones y relaciones comunes

► $\forall x \exists y \ x = y + y$

► $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$

Sintaxis de la lógica de primer orden: Términos

Desde ahora en adelante: Suponemos dada una lista infinita de variables.

Definición

El conjunto de $\mathcal{L}$ -términos es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- ▶ Cada constante c en $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{L}$ -término
- ▶ Cada variable x es un $\mathcal{L}$ -término
- ▶ Si $t_1, \dots, t_n$ son $\mathcal{L}$ -términos y f es una función n -aria en $\mathcal{L}$, entonces $f(t_1, \dots, t_n)$ es un $\mathcal{L}$ -término

Ejemplos

0 , $s(s(s(1)))$ y $s(0) \cdot s(x)$

Sintaxis de la lógica de primer orden: Fórmulas

Definición

El conjunto de $\mathcal{L}$ -fórmulas es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- ▶ Si t_1 y t_2 son $\mathcal{L}$ -términos, entonces $t_1 = t_2$ es una $\mathcal{L}$ -fórmula
- ▶ Si $t_1, \dots, t_n$ son $\mathcal{L}$ -términos y R es una relación n -aria en $\mathcal{L}$, entonces $R(t_1, \dots, t_n)$ es una $\mathcal{L}$ -fórmula
- ▶ Si φ y ψ son $\mathcal{L}$ -fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son $\mathcal{L}$ -fórmulas
- ▶ Si φ es una $\mathcal{L}$ -fórmula y x es una variable, entonces $(\exists x \varphi)$ y $(\forall x \varphi)$ son $\mathcal{L}$ -fórmulas

Notación

$t_1 = t_2$ y $R(t_1, \dots, t_n)$ son llamadas *fórmulas atómicas*.

Lógica de primer orden: Semántica

Notación

Omitimos paréntesis si no se produce una ambigüedad.

¿Es $\forall x \exists y \ x = y + y$ cierta en $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$?

- ▶ Si pensamos en los números naturales es falsa
- ▶ Pero $\mathcal{L}$ también puede usarse como vocabulario para los números reales, y en este conjunto la fórmula es cierta

El valor de verdad de una fórmula depende de la **interpretación que se da a las constantes, funciones y relaciones.**

- ▶ Tenemos que introducir la noción de estructura

Semántica de la lógica de primer orden: Estructuras

Una $\mathcal{L}$ -estructura interpreta todos los componentes de $\mathcal{L}$ en un dominio.

Definición

Una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ contiene:

- ▶ Un dominio A no vacío
- ▶ Para cada constante $c \in \mathcal{L}$, una interpretación $c^{\mathfrak{A}} \in A$ de c
- ▶ Para cada función m -aria $f \in \mathcal{L}$, una interpretación $f^{\mathfrak{A}} : A^m \rightarrow A$ de f
- ▶ Para cada relación n -aria $R \in \mathcal{L}$, una interpretación $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ de R

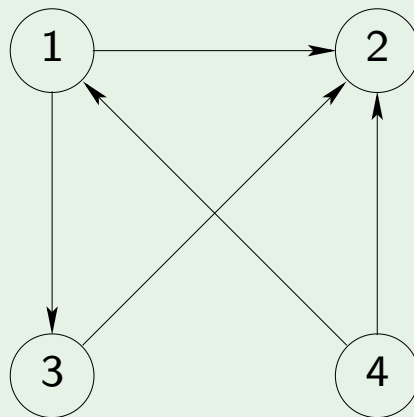
Notación

$$\mathfrak{A} = \langle A, c^{\mathfrak{A}}, \dots, f^{\mathfrak{A}}, \dots, R^{\mathfrak{A}}, \dots \rangle$$

Algunos ejemplos de estructuras

Ejemplo

Para representar grafos usamos un vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$. Por ejemplo, el siguiente grafo:



es representado por la estructura $\mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4\} \\ E^{\mathfrak{A}} &= \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\} \end{aligned}$$

Algunos ejemplos de estructuras

Ejemplo

Los números naturales son representados por la estructura:

$$\mathfrak{N} = \langle \mathbb{N}, 0^{\mathfrak{N}}, 1^{\mathfrak{N}}, s^{\mathfrak{N}}, +^{\mathfrak{N}}, \cdot^{\mathfrak{N}}, <^{\mathfrak{N}} \rangle$$

Los números reales son representados por la estructura:

$$\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, 0^{\mathfrak{R}}, 1^{\mathfrak{R}}, s^{\mathfrak{R}}, +^{\mathfrak{R}}, \cdot^{\mathfrak{R}}, <^{\mathfrak{R}} \rangle$$

Ahora podemos decir que $\mathfrak{N}$ no satisface $\forall x \exists y \ x = y + y$ y que $\mathfrak{R}$ si satisface esta fórmula.

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

Necesitamos introducir la noción de **variable libre**.

El conjunto de variables de un $\mathcal{L}$ -término t se define como:

- ▶ Si t es una constante, entonces $V(t) = \emptyset$
- ▶ Si $t = x$ es una variable, entonces $V(t) = \{x\}$
- ▶ Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$, entonces $V(t) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$

Ejemplo

$$\begin{aligned} V(f(g(x, y), s(0))) &= V(g(x, y)) \cup V(s(0)) \\ &= V(x) \cup V(y) \cup V(0) \\ &= \{x\} \cup \{y\} \cup \emptyset \\ &= \{x, y\} \end{aligned}$$

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

El conjunto de variables de una $\mathcal{L}$ -fórmula φ se define como:

- ▶ Si $\varphi = t_1 = t_2$, entonces $V(\varphi) = V(t_1) \cup V(t_2)$
- ▶ Si $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$, entonces $V(\varphi) = V(t_1) \cup \dots \cup V(t_n)$
- ▶ Si $\varphi = (\neg\psi)$, entonces $V(\varphi) = V(\psi)$
- ▶ Si $\varphi = (\psi \star \theta)$ ($\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$), entonces $V(\varphi) = V(\psi) \cup V(\theta)$
- ▶ Si $\varphi = (\exists x \psi)$ o $\varphi = (\forall x \psi)$, entonces $V(\varphi) = \{x\} \cup V(\psi)$

Ejemplo

$$\begin{aligned} V((\exists x P(x)) \vee (\forall y Q(s(y)))) &= V(\exists x P(x)) \cup V(\forall y Q(s(y))) \\ &= \{x\} \cup V(P(x)) \cup \{y\} \cup V(Q(s(y))) \\ &= \{x\} \cup V(x) \cup \{y\} \cup V(s(y)) \\ &= \{x\} \cup \{x\} \cup \{y\} \cup V(y) \\ &= \{x\} \cup \{x\} \cup \{y\} \cup \{y\} \\ &= \{x, y\} \end{aligned}$$

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

Definición

El conjunto de variables libres de una $\mathcal{L}$ -fórmula φ se define como:

- ▶ Si φ es una fórmula atómica, entonces $VL(\varphi) = V(\varphi)$
- ▶ Si $\varphi = (\neg\psi)$, entonces $VL(\varphi) = VL(\psi)$
- ▶ Si $\varphi = (\psi \star \theta)$ ($\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$), entonces $VL(\varphi) = VL(\psi) \cup VL(\theta)$
- ▶ Si $\varphi = (\exists x \psi)$ o $\varphi = (\forall x \psi)$, entonces $VL(\varphi) = VL(\psi) \setminus \{x\}$

Variable libre: No aparece cuantificada

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

Ejemplo

$$VL(P(x) \wedge \exists y Q(x, y)) = \{x\}$$

$$VL(P(z) \wedge \exists z R(z)) = \{z\}$$

Notación

- ▶ Si φ es una fórmula, entonces usamos $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ para indicar que $VL(\varphi) = \{x_1, \dots, x_k\}$
- ▶ Decimos que φ es una **oración** si $VL(\varphi) = \emptyset$

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Si una fórmula contiene variables libres, entonces no podemos decir directamente que es verdadera o falsa en una estructura.

- ▶ ¿Es $x < s(0)$ cierta en $\mathfrak{N}$?

El valor de verdad de una fórmula con variables libres depende de los valores dados a estas variables.

- ▶ Si x es 0, entonces $x < s(0)$ es cierta en $\mathfrak{N}$. Pero si x es 1, entonces es falsa

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Dada una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A , una asignación σ es una función que asigna a cada variable un valor en A .

Extendemos σ para dar valores a los términos:

- ▶ Si $t = c$ es una constante, entonces $\hat{\sigma}(t) = c^{\mathfrak{A}}$
- ▶ Si $t = x$ es una variable, entonces $\hat{\sigma}(t) = \sigma(x)$
- ▶ Si $t = f(t_1, \dots, t_n)$, entonces $\hat{\sigma}(t) = f^{\mathfrak{A}}(\hat{\sigma}(t_1), \dots, \hat{\sigma}(t_n))$

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Ejemplo

Si $\sigma(x) = 7$ es una asignación para $\mathfrak{N}$, entonces

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(s(1) \cdot s(x)) &= \hat{\sigma}(s(1)) \cdot^{\mathfrak{N}} \hat{\sigma}(s(x)) \\ &= s^{\mathfrak{N}}(\hat{\sigma}(1)) \cdot^{\mathfrak{N}} s^{\mathfrak{N}}(\hat{\sigma}(x)) \\ &= s^{\mathfrak{N}}(1^{\mathfrak{N}}) \cdot^{\mathfrak{N}} s^{\mathfrak{N}}(\sigma(x)) \\ &= 2 \cdot^{\mathfrak{N}} s^{\mathfrak{N}}(7) \\ &= 2 \cdot^{\mathfrak{N}} 8 \\ &= 16\end{aligned}$$

Por simplicidad, usamos σ en lugar de $\hat{\sigma}$

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Dado: Un vocabulario $\mathcal{L}$, una $\mathcal{L}$ -estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A y una asignación σ para $\mathfrak{A}$.

Definición

Decimos que $(\mathfrak{A}, \sigma)$ satisface una $\mathcal{L}$ -fórmula φ , denotado como $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$, si y sólo si:

- ▶ $\varphi = t_1 = t_2$ y $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$
- ▶ $\varphi = R(t_1, \dots, t_n)$ y $(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}}$
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi$
- ▶ $\varphi = (\psi \vee \theta)$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$ o $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

- ▶ $\varphi = (\psi \wedge \theta)$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \theta)$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi$ o $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$
- ▶ $\varphi = (\psi \leftrightarrow \theta)$ y ambos $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$ o ambos $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \theta$
- ▶ $\varphi = (\exists x \psi)$ y existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$, donde

$$\sigma[x/a](y) = \begin{cases} a & y = x \\ \sigma(y) & y \neq x \end{cases}$$

- ▶ $\varphi = (\forall x \psi)$ y para todo $a \in A$ se tiene que $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$

Nota: Si φ es una oración, podemos decir que $\mathfrak{A} \models \varphi$

Semántica de la lógica de primer orden: Ejemplos

Ejemplo

Sea $\mathfrak{A} = \langle A, E^{\mathfrak{A}} \rangle$, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E^{\mathfrak{A}} = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 2)\}$.

- ¿Cuáles de las siguientes fórmulas son ciertas en $\mathfrak{A}$: $\exists x \forall y E(x, y)$, $\forall x \exists y E(x, y)$, $\exists x \forall y \neg E(x, y)$, $\forall x \exists y \neg E(x, y)$?

Ejercicios

1. Sea f una función unaria y $\mathcal{L} = \{f\}$. Construya una estructura finita que satisfaga $\varphi = \forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$
2. Sean $\mathcal{L}$ y φ como en el ejercicio anterior. Construya una estructura que satisfaga $\psi = \varphi \wedge \exists x \forall y f(y) \neq x$
 - ¿Existe una estructura finita que satisfaga ψ ?