

El problema de satisfacción

Definición

Un conjunto de fórmulas Σ es *satisfacible* si existe una valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$. En caso contrario, Σ es *inconsistente*.

Existe una estrecha relación entre las nociones de consecuencia lógica y satisfacibilidad.

Teorema

$\Sigma \models \varphi$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Ejercicio

Demuestre el teorema.

El problema de satisfacción

El teorema anterior nos permite *reducir* el problema de verificar si $\Sigma \models \varphi$ al problema de verificar si $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsistente.

Ejercicio

Demuestre que la reducción inversa también es posible. Vale decir, encuentre una fórmula ψ tal que Σ es satisfacible si y sólo si $\Sigma \not\models \psi$.

Entonces, si tenemos un algoritmo para uno de los problemas, lo tenemos para el otro.

¿Cómo verificamos si una fórmula es satisfacible?

Otra noción útil

Definición

Una fórmula φ es una **tautología** si para cada valuación σ se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$.

Ejemplo

$$p \vee \neg p$$

Ejercicio

Sea Σ un conjunto finito de fórmulas. Demuestre que el problema de verificar si $\Sigma \models \varphi$ puede reducirse al problema de verificar si una fórmula es una tautología.

¿Puede ser Σ infinito? ¿Qué sucede en este caso?

Teorema de compacidad

Definición

Un conjunto de fórmulas Σ es *finitamente satisfacible* si cada subconjunto finito de Σ es satisfacible.

Ejemplo

El conjunto $\Sigma = \{p_0\} \cup \{p_i \rightarrow p_{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ es finitamente satisfacible.

¿Es Σ satisfacible?

Teorema (Compacidad)

Un conjunto de fórmulas es satisfacible si y sólo si es finitamente satisfacible.

Teorema de compacidad: Demostración

Necesitamos el siguiente lema:

Lema

Sea $\Sigma \subseteq L(P)$ finitamente satisfacible y $p \in P$. Entonces $\Sigma \cup \{p\}$ es finitamente satisfacible o $\Sigma \cup \{\neg p\}$ es finitamente satisfacible.

¿Pueden ser ambos finitamente satisfacibles?

Ejercicio

Demuestre el lema.

Teorema de compacidad: Demostración

Ahora vamos a demostrar la dirección $\Leftarrow$ del teorema. La otra dirección es trivial.

($\Leftarrow$) Suponga que $P = \{p_i \mid i \geq 1\}$ y defina una sucesión $\{\Delta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de conjuntos de literales:

Caso base: $\Delta_0 = \emptyset$.

Para $i \in \mathbb{N}$:

$$\Delta_{i+1} = \begin{cases} \Delta_i \cup \{p_{i+1}\} & \Sigma \cup \Delta_i \cup \{p_{i+1}\} \text{ es finitamente satisfacible} \\ \Delta_i \cup \{\neg p_{i+1}\} & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Finalmente: $\Delta = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Delta_i$

Teorema de compacidad: Demostración

Para cada $p_i \in P$: $p_i \in \Delta_i$ o $\neg p_i \in \Delta_i$, pero no ambas.

Por lo tanto: Existe una única valuación σ que satisface a Δ .

Vamos a demostrar que esta valuación satisface a Σ .

Por contradicción: Suponga que $\sigma(\Sigma) = 0$. Entonces existe $\varphi \in \Sigma$ tal que $\sigma(\varphi) = 0$.

Suponga que φ contiene n variables proposicionales y que p_k es la de mayor índice.

Teorema de compacidad: Demostración

Tenemos que considerar dos casos.

$\sigma(p_k) = 1$: entonces $\{\varphi\} \cup \Delta_{k-1} \cup \{p_k\}$ es inconsistente.

Entonces: $\Sigma \cup \Delta_{k-1} \cup \{p_k\}$ no es finitamente satisfacible y $\neg p_k \in \Delta_k$.

Contradicción: $\Delta_k \subseteq \Delta$ y $\sigma(p_k) = 1$.

$\sigma(p_k) = 0$: entonces $\{\varphi\} \cup \Delta_{k-1} \cup \{\neg p_k\}$ es inconsistente.

Entonces: $\Sigma \cup \Delta_{k-1} \cup \{p_k\}$ es finitamente satisfacible (por lema) y $p_k \in \Delta_k$.

Contradicción: $\Delta_k \subseteq \Delta$ y $\sigma(p_k) = 0$.

Teorema de compacidad y consecuencia lógica

Corolario

$\Sigma \models \varphi$ si y sólo si existe un subconjunto finito Σ' de Σ tal que $\Sigma' \models \varphi$.

Ejercicio

Demuestre el corolario.

Una aplicación del teorema de compacidad

Ejercicio

Sea $G = (\mathbb{N}, A)$ un grafo no dirigido tal que para todo subgrafo finito G' de G , se tiene que G' es 3-coloreable.

Utilice el teorema de compacidad para demostrar que G es 3-coloreable.