

Lógica Proposicional

IIC2213

¿Por qué necesitamos la lógica?

Necesitamos un lenguaje con una sintaxis precisa y una semántica bien definida.

Queremos usar este lenguaje en matemáticas.

- ▶ Definición de objetos matemáticos: conjunto, números naturales, números reales
- ▶ Definición de teorías matemáticas: teoría de conjuntos, teoría de los números naturales
- ▶ Definición del concepto de demostración

También queremos usar este lenguaje en computación. ¿Por qué?

¿Por qué necesitamos la Lógica en computación?

Algunas aplicaciones:

- ▶ **Bases de datos:** Lenguajes de consulta, lenguajes para restricciones de integridad
- ▶ **Inteligencia artificial:** Representación de conocimiento, razonamiento con sentido común
- ▶ **Ingeniería de software:** Especificación de sistemas, verificación de propiedades
- ▶ **Teoría de la computación:** complejidad descriptiva, algoritmos de aproximación
- ▶ **Criptografía:** verificación de protocolos criptográficos
- ▶ **Procesamiento de lenguaje natural**
- ▶ ...

Lógica Proposicional: Sintaxis

Tenemos los siguientes elementos:

- ▶ Variables proposicionales (P): $p, q, r, \dots$
- ▶ Conectivos lógicos: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$
- ▶ Símbolos de puntuación: $(,)$

Cada variable proposicional representa una proposición **completa** e **indivisible**, que puede ser **verdadera** o **falsa**

Ejemplo

$$P = \{socrates_es_hombre, socrates_es_mortal\}$$

Lógica Proposicional: Sintaxis

Conectivos lógicos son usados para construir expresiones que también pueden ser verdaderas o falsas.

Ejemplo

$$\text{socrates_es_hombre} \rightarrow \text{socrates_es_mortal}$$
$$\text{socrates_es_hombre} \rightarrow (\neg \text{socrates_es_mortal})$$

Símbolos de puntuación son usados para evitar ambigüedades.

Sintaxis de la Lógica Proposicional: Definición

Dado: Conjunto P de variables proposicionales.

Definición

$L(P)$ es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:

1. $P \subseteq L(P)$
2. Si $\varphi \in L(P)$, entonces $(\neg\varphi) \in L(P)$
3. Si $\varphi, \psi \in L(P)$, entonces $(\varphi \vee \psi) \in L(P)$, $(\varphi \wedge \psi) \in L(P)$, $(\varphi \rightarrow \psi) \in L(P)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in L(P)$

Ejercicio

Verifique que $((\neg p) \rightarrow (q \vee r))$ es una fórmula.

Sintaxis de la Lógica Proposicional: Definición

La naturaleza de la definición es inductiva.

- ▶ Permite construir programas recursivos para chequear si una fórmula está bien construida
- ▶ Permite definir inductivamente conceptos asociados a las fórmulas
- ▶ Permite demostrar inductivamente propiedades de las fórmulas

Definiciones inductivas

Queremos definir una función la que indica cuantos símbolos tiene una fórmula: $la((p \wedge q)) = 5$

Caso base : Para cada $p \in P$, $la(p) = 1$

Caso inductivo : $la((\neg\varphi)) = 3 + la(\varphi)$ y $la((\varphi \star \psi)) = 3 + la(\varphi) + la(\psi)$, donde $\star$ corresponde a $\vee, \wedge, \rightarrow$ o $\leftrightarrow$

En el ejemplo: $la((p \wedge q)) = 3 + la(p) + la(q) = 3 + 1 + 1 = 5$

Ejercicio

Defina las funciones pi y pd que indican cuáles son los números de paréntesis izquierdos y derechos en una fórmula, respectivamente.

Demostraciones inductivas

Lo siguiente parece ser cierto: Cada fórmula contiene el mismo número de paréntesis izquierdos y derechos.

$$pi(\varphi) = pd(\varphi), \text{ para cada fórmula } \varphi.$$

¿Cómo podemos demostrar esto?

Podemos usar inducción ...

Inducción en la lógica proposicional

Principio de inducción: Para cada $A \subseteq L(P)$ tal que

- Caso base : $p \in A$, para cada $p \in P$,
- Caso inductivo : si $\varphi, \psi \in A$, entonces $(\neg\varphi) \in A$ y $(\varphi \star \psi) \in A$, donde $\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

se tiene que $A = L(P)$.

¿Por qué funciona?

Ejercicio

Demuestre que cada fórmula contiene el mismo número de paréntesis izquierdos y derechos.

Inducción en la lógica proposicional: Ejercicios

1. Defina $v(\varphi)$ como el número de ocurrencias de variables proposicionales en φ .
2. Demuestre que para cada fórmula proposicional φ que no contiene el símbolo $\neg$ se tiene que $la(\varphi) \leq 4 \cdot v(\varphi)^2$.

¿Qué sucede si φ contiene el símbolo $\neg$?

¿Qué sucede si las fórmulas de la forma $(\neg(\neg\varphi))$ no son permitidas?

3. Demuestre que un prefijo propio de una fórmula no es una fórmula.

Semántica de la lógica proposicional

¿Cómo podemos determinar si una fórmula es verdadera o falsa?

Este valor de verdad depende de los valores de verdad asignados a las variables proposicionales y de los conectivos utilizados.

Valuación (asignación): $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$

Ejemplo

$\sigma(\text{socrates_es_hombre}) = 1$ y $\sigma(\text{socrates_es_mortal}) = 0$

Semántica: Definición

Dado $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$, queremos extender σ :

$$\hat{\sigma} : L(P) \rightarrow \{0, 1\}$$

Definición

Dado $\varphi \in L(P)$,

- ▶ Si $\varphi = p$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \sigma(p)$
- ▶ Si $\varphi = (\neg\alpha)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\alpha) = 0 \\ 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\alpha) = 1 \end{cases}$$

- ▶ Si $\varphi = (\alpha \vee \beta)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\alpha) = 1 \text{ o } \hat{\sigma}(\beta) = 1 \\ 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\alpha) = 0 \text{ y } \hat{\sigma}(\beta) = 0 \end{cases}$$

Semántica: Definición (continuación)

- ▶ Si $\varphi = (\alpha \wedge \beta)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\alpha) = 1 \text{ y } \hat{\sigma}(\beta) = 1 \\ 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\alpha) = 0 \text{ o } \hat{\sigma}(\beta) = 0 \end{cases}$$

- ▶ Si $\varphi = (\alpha \rightarrow \beta)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\alpha) = 0 \text{ o } \hat{\sigma}(\beta) = 1 \\ 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\alpha) = 1 \text{ y } \hat{\sigma}(\beta) = 0 \end{cases}$$

- ▶ Si $\varphi = (\alpha \leftrightarrow \beta)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\alpha) = \hat{\sigma}(\beta) \\ 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\alpha) \neq \hat{\sigma}(\beta) \end{cases}$$

Por simplicidad vamos a usar σ en lugar de $\hat{\sigma}$

Semántica: Ejemplos

Supongamos que $\sigma(\textit{socrates_es_hombre}) = 1$ y
 $\sigma(\textit{socrates_es_mortal}) = 0$.

Entonces:

$$\sigma((\textit{socrates_es_hombre} \rightarrow \textit{socrates_es_mortal})) = 0$$

$$\sigma(((\textit{socrates_es_hombre} \rightarrow \textit{socrates_es_mortal}) \wedge \\ \textit{socrates_es_hombre}) \rightarrow \textit{socrates_es_mortal})) = 1$$

Equivalencia de fórmulas

Definición

Dos fórmulas φ y ψ son **equivalentes**, denotado como $\varphi \equiv \psi$, si para toda valuación σ se tiene que $\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)$.

Algunas equivalencias útiles:

$$\begin{array}{llll} (\neg(\varphi \wedge \psi)) & \equiv & ((\neg\varphi) \vee (\neg\psi)) & (\varphi \rightarrow \psi) \equiv ((\neg\varphi) \vee \psi) \\ (\neg(\varphi \vee \psi)) & \equiv & ((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)) & (\varphi \leftrightarrow \psi) \equiv ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \\ (\varphi \wedge (\psi \wedge \theta)) & \equiv & ((\varphi \wedge \psi) \wedge \theta) & (\neg(\neg\varphi)) \equiv \varphi \\ (\varphi \vee (\psi \vee \theta)) & \equiv & ((\varphi \vee \psi) \vee \theta) & \end{array}$$

Equivalencia de fórmulas

Notación: Desde ahora en adelante

- ▶ vamos a omitir los paréntesis externos, y
- ▶ vamos a escribir $\varphi \wedge \psi \wedge \theta$ en lugar de $(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$ (lo mismo para $\vee$)

Tablas de verdad

Cada fórmula se puede representar y analizar en una tabla de verdad.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Observación: Dos fórmulas son equivalentes si tienen la misma tabla de verdad.

Ejercicio

Suponga que $P = \{p, q\}$. ¿Cuántas fórmulas contiene $L(P)$? ¿Cuántas fórmulas no equivalentes contiene este conjunto?

Conectivos n -arios

Usando tablas de verdad podemos definir conectivos n -arios:

$C(p_1, \dots, p_n)$

p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	p_n	$C(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)$
0	0	$\dots$	0	0	b_1
0	0	$\dots$	0	1	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\dots$	1	1	b_{2^n}

¿Es posible representar $C(p_1, \dots, p_n)$ usando $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$?

Conectivos n -arios

Veamos un ejemplo: $C_1(p, q, r, s)$.

p	q	r	s	$C_1(p, q, r, s)$	p	q	r	s	$C_1(p, q, r, s)$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	0

¿Cómo definimos $C_1(p, q, r, s)$ usando $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$?

Conectivos n -arios

Solución: $C_1(p, q, r, s)$ es equivalente a la siguiente fórmula

$$((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge (\neg r) \wedge s) \vee ((\neg p) \wedge q \wedge r \wedge (\neg s)) \vee \\ (p \wedge (\neg q) \wedge (\neg r) \wedge (\neg s)) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge (\neg s))$$

Notación

Desde ahora en adelante $\neg$ tiene mayor precedencia que los conectivos binarios. Así por ejemplo, $(\neg p) \rightarrow q$ es lo mismo que $\neg p \rightarrow q$ y la fórmula anterior es lo mismo que:

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee \\ (p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s)$$

Conectivos n -arios

Solución a nuestro problema original:

Suponiendo que σ_i es la valuación correspondiente a la fila i de la tabla de verdad de $C(p_1, \dots, p_n)$, este conectivo es equivalente a:

$$\bigvee_{i: b_i=1} \left(\left(\bigwedge_{j: \sigma_i(p_j)=1} p_j \right) \wedge \left(\bigwedge_{k: \sigma_i(p_k)=0} \neg p_k \right) \right)$$

Conclusión

Basta con los conectivos lógicos $\neg, \vee, \wedge$ para representar cualquier tabla de verdad.

Formas normales

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal disyuntiva (DNF)** si φ es de la forma:

$$\bigvee_{i=1}^m \left(\bigwedge_{j=1}^{n_i} l_{i,j} \right),$$

donde cada $l_{i,j}$ es un **literal**, es decir, una letra proposicional o la negación de una letra proposicional.

Ejemplo

$$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$$

Teorema

Toda fórmula es equivalente a una fórmula en DNF.

Formas normales

Decimos que una fórmula φ está en **forma normal conjuntiva (CNF)** si φ es de la forma:

$$\bigwedge_{i=1}^m \left(\bigvee_{j=1}^{n_i} l_{i,j} \right),$$

donde cada $l_{i,j}$ es un literal.

Ejemplo

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg r \vee s)$$

Teorema

Toda fórmula es equivalente a una fórmula en CNF.

La noción de consecuencia lógica

Una valuación σ satisface un conjunto de fórmulas Σ si para cada $\varphi \in \Sigma$, se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$.

Notación: $\sigma(\Sigma) = 1$

¿Cuándo decimos que una fórmula ψ se deduce desde Σ ?

Definición

ψ es *consecuencia lógica* de Σ , denotado como $\Sigma \models \psi$, si para cada valuación σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, se tiene que $\sigma(\psi) = 1$.

La noción de consecuencia lógica: Ejemplos

Modus ponens:

$$\{p, p \rightarrow q\} \models q$$

Demostración por partes:

$$\{p \vee q \vee r, p \rightarrow s, q \rightarrow s, r \rightarrow s\} \models s$$

Ejercicio

- ▶ Demuestre que si $\Sigma \models \alpha \wedge \beta$, entonces $\Sigma \models \alpha$ y $\Sigma \models \beta$.
- ▶ ¿Es cierto que si $\Sigma \models \alpha \vee \beta$, entonces $\Sigma \models \alpha$ o $\Sigma \models \beta$?

Teorema de monotonía

Teorema (Monotonía)

Si $\Sigma \models \psi$, entonces para cada fórmula θ se tiene que $\Sigma \cup \{\theta\} \models \psi$.

Ejercicio

Demuestre el teorema de monotonía.

Sabemos que $\{p, p \rightarrow q\} \models q$. Usando el teorema de monotonía deducimos que $\{p, p \rightarrow q, \neg q\} \models q$. ¿Cómo es esto posible?

¿Puede usarse la lógica proposicional para modelar razonamiento con sentido común?

Un paréntesis: Revisión de conocimiento

Teorema de monotonía: Agregar conocimiento no nos permite retractarnos.

- ▶ No *actualizamos* nuestro conocimiento de acuerdo a la nueva información

Dado Σ y φ : queremos generar una fórmula que refleje la actualización de Σ dado φ .

Notación: $\Sigma \circ \varphi$

¿Cómo podemos hacer esto? ¿Qué debería ser $\{p, p \rightarrow q\} \circ \neg q$?

Un paréntesis: Revisión de conocimiento

Una primera alternativa: $\Sigma \circ \varphi = \varphi$

Vamos a mostrar una mejor alternativa: **Belief Revision**

Notación

Dado un conjunto de variables proposicionales P

- ▶ **$\text{modelos}(\Sigma)$** : *Conjunto de las valuaciones de P que satisfacen Σ*
- ▶ **$\Delta(\sigma_1, \sigma_2)$** : *Conjunto de las variables proposicionales $p \in P$ tales que $\sigma_1(p) \neq \sigma_2(p)$*

Ejemplo

Si $P = \{p, q\}$, $\sigma_1(p) = 1$, $\sigma_1(q) = 1$, $\sigma_2(p) = 1$, $\sigma_2(q) = 0$, entonces $\Delta(\sigma_1, \sigma_2) = \{q\}$.

$\Delta(\sigma_1, \sigma_2)$ mide la *distancia* entre σ_1 y σ_2 .

Un paréntesis: Revisión de conocimiento

Para actualizar Σ dado φ , vamos a actualizar los modelos de Σ con respecto a φ .

Dado σ tal que $\sigma(\Sigma) = 1$, queremos seleccionar los modelos σ_1 de φ que están a distancia mínima de σ .

Formalmente:

$$\textit{mínimo}(\sigma, \varphi) = \{ \sigma_1 \mid \sigma_1(\varphi) = 1 \text{ y no existe } \sigma_2 \text{ tal que} \\ \sigma_2(\varphi) = 1 \text{ y } \Delta(\sigma, \sigma_2) \subsetneq \Delta(\sigma, \sigma_1) \}$$

Un paréntesis: Revisión de conocimiento

Definimos los modelos de $\Sigma \circ \varphi$ como los modelos de φ que están *más cerca* de los modelos de Σ :

$$\text{modelos}(\Sigma \circ \varphi) = \bigcup_{\sigma : \sigma(\Sigma)=1} \text{mínimo}(\sigma, \varphi)$$

y definimos $\Sigma \circ \varphi$ como una fórmula ψ arbitraria tal que $\text{modelos}(\psi) = \text{modelos}(\Sigma \circ \varphi)$.

¿Siempre existe esta fórmula? ¿Es única?

Un paréntesis: Revisión de conocimiento

Ejemplo

$$\Sigma = \{p, p \rightarrow q\} \text{ y } \varphi = \neg q$$

Primero calculamos los modelos de Σ y φ :

$$\begin{aligned} \text{modelos}(\Sigma) &= \{\sigma\}, & \text{donde } \sigma(p) = \sigma(q) = 1 \\ \text{modelos}(\varphi) &= \{\sigma_1, \sigma_2\}, & \text{donde } \sigma_1(p) = 1, \sigma_1(q) = 0 \text{ y} \\ & & \sigma_2(p) = \sigma_2(q) = 0. \end{aligned}$$

Después calculamos los modelos mínimos:

$$\begin{aligned} \Delta(\sigma, \sigma_1) &= \{q\} \\ \Delta(\sigma, \sigma_2) &= \{p, q\} \\ \text{mínimo}(\sigma, \varphi) &= \{\sigma_1\} \\ \text{modelos}(\Sigma \circ \varphi) &= \{\sigma_1\} \end{aligned}$$

$$\text{Resultado: } \{p, p \rightarrow q\} \circ \neg q = p \wedge \neg q$$