

El sistema deductivo de Hilbert

IIC2213

Completitud de resolución proposicional

¿Qué tenemos que agregar a nuestro sistema de deducción para que sea completo?

Si C es una tautología, no podemos usar directamente resolución para demostrar que $\emptyset \models C$.

- ▶ Sólo podemos usar resolución para demostrar que $\neg C$ es inconsistente.

Regla de tautología

Si C contiene literales complementarios, entonces:

$$\frac{\emptyset}{C}$$

¿Por qué la condición de la regla es que la cláusula contenga literales complementarios?

Esto soluciona el problema anterior, pero ¿es suficiente para que el sistema sea completo?

Complejidad de resolución proposicional

Definición

Una demostración por resolución de C desde Σ es una secuencia de cláusulas $C_1, C_2, \dots, C_n$ tal que:

- ▶ *Para cada $i \leq n$:*
 - ▶ $C_i \in \Sigma$ o
 - ▶ C_i es una tautología o
 - ▶ existe $j < i$ tal que C_i es obtenido desde C_j usando la regla de factorización o
 - ▶ existen $j, k < i$ tales que C_i es obtenido desde C_j y C_k usando la regla de resolución
- ▶ $C_n = C$

Notación

Seguimos usando $\Sigma \vdash C$

Teorema

Dado un conjunto de cláusulas $\Sigma \cup \{C\}$, si $\Sigma \models C$, entonces $\Sigma \vdash C$.

Ejercicio

Demuestre el teorema usando el teorema de completitud débil para resolución.

Un sistema completo para la lógica proposicional

El sistema basado en resolución sólo nos permite usar cláusulas.

- ▶ ¿Cómo generamos un sistema completo para cualquier tipo de fórmula?

Vamos a mostrar un sistema completo para $\{\neg, \rightarrow\}$.

Un sistema completo para la lógica proposicional

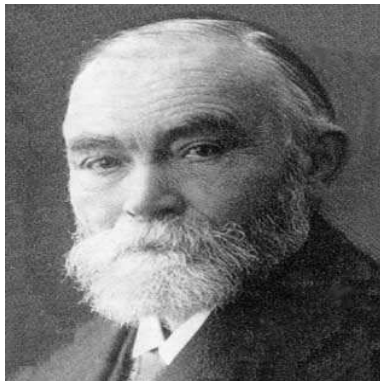
Resolución ya nos dio una buena idea de que es lo que necesitamos para tener un sistema completo:

- ▶ Un conjunto de reglas para inferir tautologías
- ▶ Un conjunto de reglas de inferencia

David Hilbert diseñó un sistema completo con estos componentes.

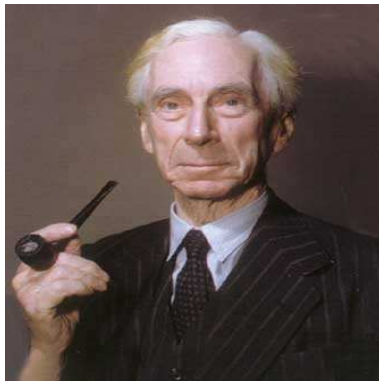
- ▶ ¿Por qué Hilbert quería desarrollar un sistema como este?

Un poco de historia ...



Gottlob Frege (1848 - 1925)

Un poco de historia ...



Bertrand Russell (1872 - 1970)

Un poco de historia ...



David Hilbert (1862 - 1943)

Un poco de historia ...



Kurt Gödel (1906 - 1978)

El sistema de Hilbert

El sistema de deducción de Hilbert consta de dos elementos:

- ▶ Tres esquemas para generar tautologías:

$$(a) \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(b) (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \theta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \theta))$$

$$(c) (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$$

- ▶ Una regla de inferencia:

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\varphi} \varphi$$

Esta regla es llamada **modus ponens**, y básicamente representa la regla de resolución.

El sistema de Hilbert

Definición

Dado un conjunto de fórmulas $\Sigma \cup \{\varphi\}$, una deducción formal de φ desde Σ es una secuencia de fórmulas $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ tal que:

- ▶ *Para cada $i \leq n$:*
 - ▶ $\varphi_i \in \Sigma$ o
 - ▶ φ_i es una instancia de un esquema de Hilbert o
 - ▶ existen $j, k < i$ tales que φ_i es obtenido desde φ_j y φ_k usando *modus ponens*
- ▶ $\varphi_n = \varphi$

Notación

$\Sigma \vdash_H \varphi$

Ejercicio

Demuestre que el sistema de Hilbert es correcto.

El sistema de Hilbert: Ejemplo

Queremos demostrar que $\emptyset \vdash_H p \rightarrow p$.

Demostración

$$(1) \quad p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)$$

esquema (a)

$$(2) \quad (p \rightarrow ((p \rightarrow p) \rightarrow p)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p))$$

esquema (b)

$$(3) \quad (p \rightarrow (p \rightarrow p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$$

modus ponens (1) y (2)

$$(4) \quad p \rightarrow (p \rightarrow p)$$

esquema (a)

$$(5) \quad p \rightarrow p$$

modus ponens (3) y (4)

El sistema de Hilbert: Otro ejemplo

Ahora queremos demostrar que $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash_H p \rightarrow r$.

Demostración

$$(1) \quad (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

esquema (a)

$$(2) \quad q \rightarrow r$$

pertenece a Σ

$$(3) \quad p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

modus ponens (1) y (2)

$$(4) \quad (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

esquema (b)

El sistema de Hilbert: Otro ejemplo

$$(5) \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

modus ponens (3) y (4)

$$(6) \quad p \rightarrow q$$

pertenece a Σ

$$(7) \quad p \rightarrow r$$

modus ponens (5) y (6)

El sistema de Hilbert: Completitud

Teorema (Completitud de la lógica proposicional)

Dado un conjunto de fórmula $\Sigma \cup \{\varphi\}$:

si $\Sigma \models \varphi$, entonces $\Sigma \vdash_H \varphi$

El sistema de Hilbert: Una consecuencia

Corolario (Compacidad)

Un conjunto de fórmulas Σ es satisfacible si y sólo si Σ es finitamente satisfacible.

Ejercicio

Demuestre el corolario.